

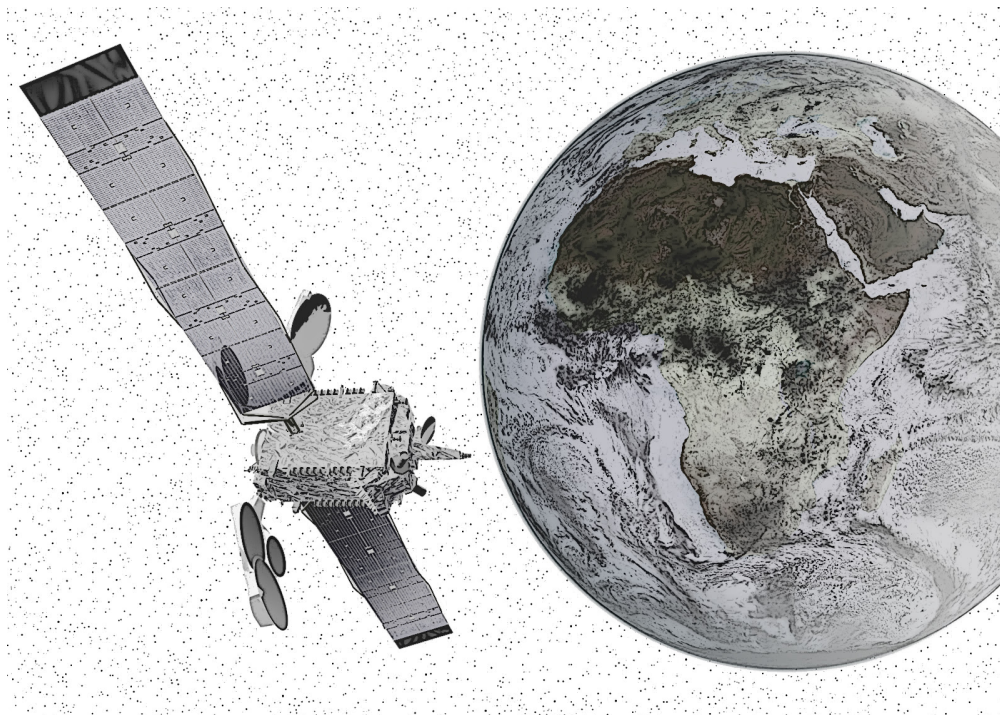


Département Sciences du Numérique

Équations différentielles

Olivier Cots

15 février 2020



Version préliminaire. Début de rédaction : février 2020.

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	1
Chapitre 2. Théorèmes d'existence et d'unicité de solutions	2
2.1 Solutions des équations différentielles ordinaires	2
2.2 Problème de Cauchy et résolution d'une équation intégrale	4
2.3 Existence de solutions : théorème de Cauchy-Peano-Arzela	6
2.4 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz	7
2.5 Temps de vie des solutions - critère de maximalité	8
Chapitre 3. Équations différentielles linéaires	9
Chapitre 4. Flot et orbites	10
4.1 Flot d'une équation différentielle	10
4.2 Orbites et portraits de phase	11
4.3 Linéarisation et perturbation du flot	12
4.4 Équation linéarisée	15
4.5 Dépendance par rapport à un paramètre	17
4.6 Dépendance par rapport à l'instant initial	18
Chapitre 5. Stabilité des équilibres	19
Chapitre 6. Intégration numérique	20
6.1 Introduction	20
6.2 Méthodes de Runge-Kutta explicite	21
6.3 Méthodes de Runge-Kutta implicite	22
6.4 Méthodes de collocation	26
6.5 Ordre, consistance, stabilité et convergence	26
6.6 Méthodes de Runge-Kutta emboîtées, pas variable et sortie dense	27
6.7 Second membre discontinu et détection d'événements	27
6.8 Calcul des équations variationnelles	27
6.9 Introduction aux différences finies	28
Bibliographie	31
Index	33

CHAPITRE 1

Introduction

Nous reprenons en introduction le point de vue du mathématicien V. Arnold [1].

La théorie des équations différentielles ordinaires est l'un des principaux instruments des mathématiques. Elle permet d'étudier quantité de processus d'évolution *déterministes, finis* et *différentiables*.

On dit qu'un processus est *déterministe* si toute son évolution et son passé sont définis de façon unique par son état présent. L'ensemble de tous les états de ce processus s'appelle *espace des phases*. Ainsi, en mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont l'avenir et le passé sont univoquement définis par les positions et les vitesses initiales de tous les points du système. L'espace des phases d'un tel système mécanique est un ensemble dont les éléments sont constitués par l'ensemble des positions et vitesses de tous les points du système considéré. En mécanique quantique, le mouvement des particules n'est pas un processus déterministe.

Un processus est de *dimension finie* s'il en est de même de son espace des phases, c'est-à-dire si est fini le nombre des paramètres indispensables à la description de son état. Tel est en mécanique classique par exemple, le cas d'un système constitué d'un nombre fini de points matériels ou de corps solides. La dimension de l'espace des phases est de $6n$ pour un système de n points matériels et de $12n$ pour un système de n solides. Les mouvements des fluides en hydrodynamique, les vibrations de la corde de la membrane, la propagation des ondes en optique et en acoustique sont des exemples de processus qu'il est impossible de décrire dans un espace des phases de dimension finie.

Un processus est *différentiable* si son espace des phases est muni d'une structure de variété différentiable, et ses changements d'états dans le temps, définis par des fonctions différentiables. Les coordonnées et les vitesses des points d'un système mécanique sont différentiables par rapport au temps. Les mouvements étudiés en théorie du choc ne sont pas différentiables.

En mécanique classique donc, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires, tandis que d'autres procédés seront nécessaires en mécanique quantique, en théorie de la chaleur, en hydrodynamique, en théorie de l'élasticité, en optique, en acoustique et en théorie du choc.

Théorèmes d'existence et d'unicité de solutions

Sommaire

2.1	Solutions des équations différentielles ordinaires	2
2.2	Problème de Cauchy et résolution d'une équation intégrale	4
2.3	Existence de solutions : théorème de Cauchy-Peano-Arzela	6
2.4	Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz	7
2.5	Temps de vie des solutions - critère de maximalité	8

2.1 Solutions des équations différentielles ordinaires

Soient \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et une application continue

$$\begin{aligned} f: \mathcal{I} \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x). \end{aligned}$$

On dit que la fonction φ est solution de l'équation différentielle (ordinaire) de *second membre* f , si et seulement si φ est une fonction dérivable définie sur un certain intervalle $I \subset \mathcal{I}$, telle que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \in \Omega$ et $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ (où $\dot{\varphi}(t) := \frac{d\varphi}{dt}(t)$). Soient $t_0 \in \mathcal{I}$, $x_0 \in \Omega$, considérons maintenant l'équation différentielle à condition initiale (ou *problème de Cauchy*), que l'on note de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1. On pourrait considérer un second membre défini sur un ouvert quelconque $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pour simplifier la présentation, on suppose que cet ouvert peut s'écrire sous la forme $\mathcal{I} \times \Omega$.

Définition 2.1.1 – Champ de vecteurs, cf. figure 2.1

Une telle application $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée un *champ de vecteurs* : à tout couple $(t, x) \in \mathcal{I} \times \Omega$, elle associe un vecteur $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.2 – Solution (forte) d'un problème de Cauchy

On suppose f continue. On appelle *solution (forte) de (2.1)* tout couple (I, φ) , où I est un intervalle ouvert de \mathcal{I} contenant t_0 et $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable sur I , tel que $\forall t \in I$, $\varphi(t) \in \Omega$, $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Remarque 2.1.2. Si f est continue (respectivement C^k) et si (I, φ) est une solution alors $\varphi \in C^1$ (respectivement C^{k+1}).

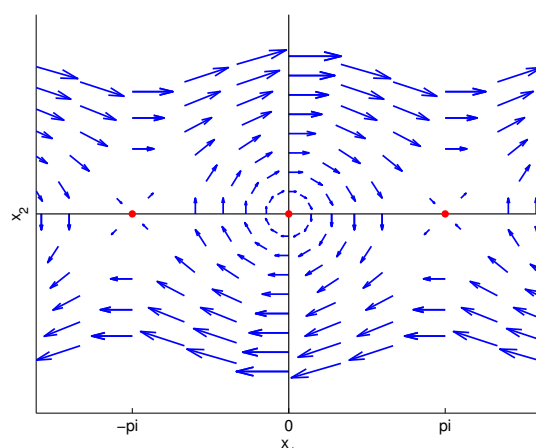


FIGURE 2.1 – Représentation d'un champ de vecteurs en dimension 2.

L'image de l'application φ s'appelle *orbite* ou *trajectoire* ou parfois *courbe de phase* et le graphique¹ de l'application φ , *courbe intégrale*. Les courbes intégrales sont situées dans le produit direct de l'axe t par l'espace des phases. Ce produit direct s'appelle *espace des phases élargi*. Cet espace est à $n + 1$ dimensions. Soit (t_0, x_0) un point de l'espace des phases élargi. Une solution (I, φ) vérifie la *condition initiale* (t_0, x_0) si $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = x_0$, c'est à dire si la courbe intégrale passe par le point (t_0, x_0) .

Définition 2.1.3 – Solution maximale

Une solution (I, φ) est dite *maximale* si, pour toute autre solution (J, ψ) , on a $J \subset I$ et $\varphi = \psi$ sur J . On dit que qu'une solution (I, φ) est un *prolongement* d'une autre solution (J, ψ) , si $J \subset I$ et $\varphi = \psi$ sur J .

Théorème 2.1.1 – Prolongement des solutions

Toute solution se prolonge en une solution maximale (pas nécessairement unique).

► Voir [4, Section 1.3, Chapitre V]. ■

Définition 2.1.4 – Solution globale

Une solution *globale* est définie sur tout l'intervalle \mathcal{I} .

Remarque 2.1.3. Tout solution globale est maximale mais la réciproque est fausse. Voir l'exemple de solutions globale et maximale (mais non globale) figure 2.2.

Exemple 2.1.1. Considérons le système $\dot{x}(t) = x(t)^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- ⊗ La fonction nulle est une solution globale.
- ⊗ La fonction $\varphi(t) = -\frac{1}{t}$ définit deux solutions respectivement sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$. Ces solutions sont maximales mais non globales.

1. On appelle graphique de l'application $f : X \rightarrow Y$ le sous-ensemble du produit direct $X \times Y$ composé de tous les couples $(x, f(x))$, où $x \in X$; le *produit direct* $X \times Y$ est l'ensemble des couples (x, y) , où $x \in X, y \in Y$.

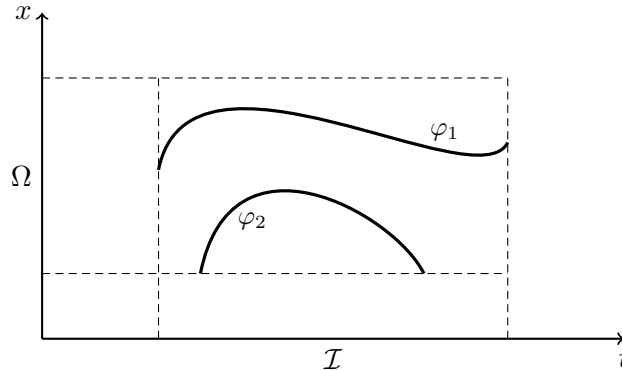


FIGURE 2.2 – Exemple de solutions globale (φ_1) et maximale mais non globale (φ_2).

2.2 Problème de Cauchy et résolution d'une équation intégrale

Nous allons montrer que résoudre un problème de Cauchy revient à résoudre une équation intégrale. Rappelons tout d'abord deux résultats fondamentaux de l'analyse : [10, théorème 2.40.2] et [10, théorème 2.41.3].

Théorème 2.2.1 – fondamental de l'analyse I

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction intégrable. Alors, la fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ est continue, dérivable presque partout et $F' = f$ p.p.

Remarque 2.2.1. Si f est continue sur $[a, b]$ alors F est une primitive de f , i.e. F est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(t) = f(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Nous savons donc d'après ce premier résultat fondamental de l'analyse (théorème (2.2.1)), que n'importe quelle fonction f **continue** sur un intervalle compact est égale à la dérivée de l'intégrale $F(x) := \int_a^x f(t) dt$. Le résultat présenté est plus général et se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue ; une fonction f **intégrable** (au sens de Lebesgue) est égale presque partout à la dérivée de son intégrale.

D'après un second résultat fondamental de l'analyse, nous savons que si F est une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle compact, et si f est intégrable, alors F est égale à l'intégrale de sa dérivée f . Par contre, une fonction F **continue et presque partout dérivable**, même si sa dérivée est intégrable, peut ne pas être égale à l'intégrale de sa dérivée. L'escalier du diable, ou escalier de Cantor, en est un exemple. Nous introduisons alors les fonctions absolument continues qui sont construites pour être égales à l'intégrale de leur dérivée, cf. théorème (2.2.2).

Définition 2.2.1 – Absolue continuité

On dit que la fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est *absolument continue* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute famille finie $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ d'intervalles ouverts contenus dans $[a, b]$ et disjoints deux à deux, on ait

$$\sum_{i \in I} (b_i - a_i) \leq \delta \implies \sum_{i \in I} \|F(a_i) - F(b_i)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.2. On note $AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Théorème 2.2.2 – fondamental de l'analyse II

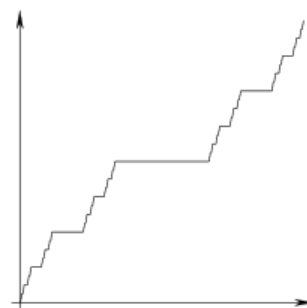
Soit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue, alors F est dérivable presque partout, sa dérivée est intégrable et on a

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

La réciproque est vraie.

Exemple 2.2.1.

L'escalier de Cantor,² ou escalier du diable, est le graphe d'une fonction F continue croissante sur $[0, 1]$, telle que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, qui est dérivable presque partout, la dérivée étant presque partout nulle. Cette fonction ne peut donc pas être absolument continue. Cette fonction est construite de telle sorte que l'image de l'ensemble de Cantor,³ qui est de mesure nulle, est $[0, 1]$ tout entier.



Escalier de Cantor.

Définissons le problème de Cauchy suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

où $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{I} intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert de \mathbb{R}^n et $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$.

Remarque 2.2.3. Nous n'imposons pas dans (2.2) que la fonction f soit continue.

Définissons maintenant une notion plus faible de solution.

Définition 2.2.2 – Solution faible d'un problème de Cauchy

On appelle *solution faible* de (2.2) tout couple (I, φ) , I intervalle ouvert de \mathcal{I} contenant t_0 et $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement⁴ absolument continue, tel que $\forall t \in I$, $\varphi(t) \in \Omega$, $\varphi(t_0) = x_0$ et $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ pour presque tout $t \in I$.

Le résultat suivant montre que la résolution d'un problème de Cauchy revient à résoudre une équation intégrale.

2. Voir source https://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor.

3. Voir source https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor.

4. On rappelle qu'une fonction $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement absolument continue si elle est absolument continue sur tout intervalle compact de I .

Théorème 2.2.3 – Équation intégrale

Soient $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$. (I, φ) est une solution faible du problème de Cauchy $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ si et seulement si : $\forall t \in I \subset \mathcal{I}$, $\varphi(t) \in \Omega$, la fonction $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$ est localement intégrable et

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds.$$

► Si (I, φ) est une solution faible alors φ est absolument continue donc d'après le théorème 2.2.2 on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s) \, ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds.$$

Montrons la réciproque. Si l'application $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$ est intégrable sur tout compact et si

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds,$$

alors d'après le théorème 2.2.1, $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ p.p., donc (I, φ) est une solution faible. ■

Remarque 2.2.4. Si f est **continue** et si (I, φ) est une solution faible, alors la fonction $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$ est continue. Par suite, la dérivée de φ qui existe presque partout est égale à une fonction continue. Donc $\dot{\varphi}$ existe partout sur I , i.e. φ est une primitive de $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$, et donc (I, φ) est une solution au sens classique (voir définition 2.1.2) de l'équation (2.2).

2.3 Existence de solutions : théorème de Cauchy-Peano-Arzela

Cette section n'est qu'une ébauche pour le moment. Nous considérons une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{E}$$

où $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **continue** et où \mathcal{I} est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On a alors le résultat suivant extrait de [4, §V.2].

Proposition 2.3.1

Par tout point (t_0, x_0) de $\mathcal{I} \times \Omega$, il passe au moins une solution maximale $\varphi: I \mapsto \mathbb{R}^n$ de (E). De plus, l'intervalle de définition I de toute solution maximale est ouvert.

Exemple 2.3.1. En général, il n'y a pas unicité des solutions maximales comme le montre cet exemple. Considérons le problème de Cauchy : $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$. La fonction nulle est solution, ainsi que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ t^2/4 & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

et toutes deux sont maximales, car définies sur \mathbb{R} tout entier.

2.4 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

L'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy (2.1) nous est donné par le théorème 2.4.1 de Cauchy-Lipschitz sous certaines hypothèses. L'application f doit être localement lipschitzienne par rapport à la variable x .

Définition 2.4.1 – Application localement lipschitzienne

L'application $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne par rapport à la variable x si et seulement si pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$ il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$ et une constante $k \geq 0$ tels que

$$\forall t, x_1, x_2, \quad (t, x_1) \in V, \quad (t, x_2) \in V, \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

Remarque 2.4.1. Si f est différentiable par rapport à x et si l'application

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}: \mathcal{I} \times \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ (t, x) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \end{aligned}$$

est continue, alors f est localement lipschitzienne par rapport à x .

Théorème 2.4.1 – de Cauchy-Lipschitz

Soit $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , f **continue** et f localement lipschitzienne par rapport à la variable x . Sous ces hypothèses, il existe pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$ une unique solution maximale (définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathcal{I}$) au problème de Cauchy (2.1) : $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$.

► Voir [5, 8] pour la démonstration. ■

Si f **n'est plus continue**, nous avons le résultat suivant pour une solution maximale **faible**.

Théorème 2.4.2 – de Cauchy-Lipschitz généralisé

Considérons l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, avec f une application de $\mathcal{I} \times \Omega$ dans \mathbb{R}^n , avec \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que pour tout $t \in \mathcal{I}$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue et que pour tout $x \in \Omega$ la fonction, $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable. On suppose de plus que la fonction f vérifie les deux hypothèses suivantes :

1. f est localement lipschitzienne par rapport à x au sens suivant : $\exists \alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^+)$ et $\forall x \in \Omega$, $\exists r > 0$ t.q. $B(x, r) \subset \Omega$, tels que :

$$\forall t \in \mathcal{I}, \quad \forall y, z \in B(x, r), \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|.$$

2. f est localement intégrable par rapport à t au sens suivant :

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists \beta \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^+), \quad \forall t \in \mathcal{I}, \quad \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

Alors pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$, il existe une unique solution maximale (faible) (I, φ) au problème de Cauchy (2.2) : $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$.

► Voir [9] pour la démonstration. ■

Remarque 2.4.2. $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^+)$ si $\varphi \mathbf{1}_K \in L^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^+)$, $\forall K$ compact $\subset \mathcal{I}$, où $\mathbf{1}_K$ est la fonction caractéristique de K .

2.5 Temps de vie des solutions - critère de maximalité

Cette section n'est qu'une ébauche pour le moment. Voir [4, 5, 8] pour plus de détails.

Corollaire 2.5.1

Soit $f: (t, x) \in \mathcal{I} \times \Omega \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, \mathcal{I} un intervalle ouvert, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose f continue et on suppose qu'il existe une fonction continue $k: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout t fixé, l'application $x \mapsto f(t, x)$ soit localement lipschitzienne (par rapport à x) de rapport $k(t)$. Alors, la solution maximale est globale.

Remarque 2.5.1. Ce résultat est toujours vrai si on suppose f et k localement intégrables par rapport à t .

Corollaire 2.5.2

On considère le problème de Cauchy linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Si $A(t)$ et $b(t)$ sont définis sur tout \mathbb{R} et continus, alors on a existence et unicité de la solution maximale sur $I = \mathbb{R}$. Le résultat est en particulier vrai si le système est autonome.

Remarque 2.5.2. Ce résultat est toujours vrai si $A(t)$ est seulement localement intégrable.

Théorème 2.5.3 – d'échappement

Soit $f: (t, x) \in \mathcal{I} \times \Omega \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, avec \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que f est continue, dérivable par rapport à x et telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}: \mathcal{I} \times \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ (t, x) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \end{aligned}$$

soit continue. Soient K un compact contenu dans $\mathcal{I} \times \Omega$ et $(t_0, x_0) \in K$. On note $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$ la trajectoire (maximale) au problème de Cauchy : $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Alors, il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$, tels que pour tout $t \notin]t_0 - \eta_1, t_0 + \eta_2[$, $(t, x(t, t_0, x_0)) \notin K$, i.e. la courbe intégrale s'échappe de K .

Équations différentielles linéaires

Voir [4, 5, 8]. Voir aussi le cours d'automatique de 1A.

CHAPITRE 4

Flot et orbites

Sommaire

4.1	Flot d'une équation différentielle	10
4.2	Orbites et portraits de phase	11
4.3	Linéarisation et perturbation du flot	12
4.4	Équation linéarisée	15
4.5	Dépendance par rapport à un paramètre	17
4.6	Dépendance par rapport à l'instant initial	18

4.1 Flot d'une équation différentielle

Soit $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , f continue et f localement lipschitzienne par rapport à la variable x . Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$ il existe une unique solution maximale $(I(t_0, x_0), \varphi(\cdot, t_0, x_0))$ au problème de Cauchy (2.1). L'application partielle $t \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$ est définie sur $I(t_0, x_0)$ et est par définition la solution maximale de (2.1).

Définition 4.1.1 – Flot

L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{D} \subset \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\longmapsto \varphi(t, t_0, x_0), \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D} := \{(t, t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \Omega \mid t \in I(t_0, x_0)\},$$

est appelée le *flot* du champ de vecteurs f (ou de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$).

L'application $\varphi_t: (t_0, x_0) \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$, pour t fixé, joue un rôle important dans l'étude qualitative de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. On peut imaginer φ_t comme une application transportant à l'instant t un objet présent en x_0 au temps initial t_0 .

Exemple 4.1.1. Pour un système autonome linéaire homogène de la forme $\dot{x}(t) = Ax(t)$, avec $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, le flot est donné par l'exponentielle de la matrice A :

$$\varphi(t, t_0, x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0, \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Remarque 4.1.1. Dans l'exemple 4.1.1, le système étant autonome, les solutions sont invariantes par translation du temps : si $\varphi(\cdot)$ est solution alors $\varphi(t_0 + \cdot)$ l'est aussi. On peut donc par symétrie fixer $t_0 = 0$ et écrire le flot $\varphi(t, x_0)$.

Remarque 4.1.2. Pour un système linéaire homogène non nécessairement autonome, *i.e.* de la forme $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, l'application partielle $\varphi_{t,t_0}: x_0 \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$ est linéaire et on l'appelle la résolvante de l'équation $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, que l'on note $R(t, t_0)$. La résolvante est

solution de l'équation $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(t_0) = I_n$ et vaut $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$ si le système est autonome. Ainsi, de manière générale,

$$\varphi(t, t_0, x_0) = R(t, t_0) x_0$$

pour un système linéaire homogène.

Exemple 4.1.2. Pour un système linéaire avec second membre $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$, le flot est donné par la formule suivante :

$$\varphi(t, t_0, x_0) = R(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s) b(s) ds,$$

où R est la résolvante du système linéaire $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Voir [5] pour la démonstration.

D'après l'exemple 4.1.1, on peut voir le flot comme une généralisation de l'exponentielle de matrices, tout comme l'est la résolvante d'un système linéaire homogène. Il possède donc des propriétés similaires tout comme la résolvante.

Proposition 4.1.1 – Formule du flot

Considérons un système autonome $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Le temps initial est $t_0 = 0$. Notons $I(x_0)$ l'intervalle de définition de la solution maximale $\varphi(\cdot, x_0)$. Pour tout $t_1 \in I(x_0)$ et $t_2 \in I(\varphi_{t_1}(x_0))$, on a $t_1 + t_2 \in I(x_0)$ et

$$\varphi_{t_1+t_2}(x_0) = \varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}(x_0).$$

En particulier, si $t \in I(x_0)$, alors $\varphi_{-t} \circ \varphi_t(x_0) = x_0$.

► D'après l'invariance par translation du temps, l'application $t \mapsto \varphi_{t_1+t}(x_0)$ est la solution maximale valant $\varphi_{t_1}(x_0)$ en $t = 0$, ce qui est la définition de $t \mapsto \varphi_t(\varphi_{t_1}(x_0))$. ■

4.2 Orbites et portraits de phase

Considérons dans cette section 4.2, un système autonome non linéaire de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (4.1)$$

On supposera ici f de classe \mathcal{C}^1 dans Ω , un ouvert de \mathbb{R}^n , pour éviter les difficultés inhérentes au manque de régularité du second membre.

Définition 4.2.1 – Orbite

On appelle *orbite* d'un point $x_0 \in \Omega$ l'ensemble

$$\mathcal{O}_{x_0} := \{\varphi_t(x_0) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I(x_0)\}.$$

L'orbite de x_0 est la courbe tracée dans \mathbb{R}^n par la solution maximale $\varphi(\cdot, x_0)$ de l'équation (4.1) passant par x_0 en $t = 0$. Elle est aussi appelée *trajectoire* ou *courbe de phase*.

Proposition 4.2.1

Pour tout $x \in \mathcal{O}_{x_0}$, on a $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{x_0}$.

► Soit $x \in \mathcal{O}_{x_0}$. Il existe un temps t_0 tel que $x = \varphi_{t_0}(x_0)$. Tout point $y \in \mathcal{O}_x$ s'écrit $y := \varphi_t(x) = \varphi_t \circ \varphi_{t_0}(x_0) = \varphi_{t+t_0}(x_0)$ (d'après la proposition 4.1.1), donc $y \in \mathcal{O}_{x_0}$. De même, tout $z \in \mathcal{O}_{x_0}$ s'écrit $z := \varphi_t(x_0) = \varphi_t \circ \varphi_{-t_0}(x) = \varphi_{t-t_0}(x)$, donc $z \in \mathcal{O}_x$. ■

Ainsi, deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser. Chaque point de Ω appartient donc à une et une seule orbite. La partition de Ω en orbite s'appelle le *portrait de phase* du champ de vecteurs. On y trouve trois types d'orbites :

- ⊛ des points, *i.e.* $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$. Un tel point est dit *d'équilibre* et vérifie $f(x_0) = 0$.
- ⊛ des courbes fermées : il existe alors un point x dans l'orbite et un temps $T > 0$ tels que $\varphi_T(x) = x$. Ceci implique que $\varphi_{t+T}(x) = \varphi_t(x)$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, *i.e.* la solution maximale $\varphi(\cdot, x)$ est T -périodique. L'orbite est dite *périodique*.
- ⊛ des courbes ouvertes : il n'y a alors aucun point double, donc si $t \neq s$ alors $\varphi_t(x) \neq \varphi_s(x)$.

Exemple 4.2.1 (Le pendule simple). Considérons une masse m suspendue à une tige de masse nulle (fixée à son autre extrémité), de longueur l . Désignons par θ l'angle d'écart de la tige par rapport à la verticale. L'application du principe fondamental de la dynamique nous donne l'équation de mouvement du pendule :

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)),$$

où g est l'accélération de la pesanteur. L'espace des phases est à deux dimensions. Pour coordonnées, on peut prendre $x_1 := \theta$ et la vitesse angulaire $x_2 := \dot{\theta}$. L'équation prend alors la forme (avec $\omega^2 := g/l$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega^2 \sin(x_1(t)) \end{cases} \quad (4.2)$$

que l'on peut réécrire sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t))$ avec $x := (x_1, x_2)$ et $f(x) := (x_2, -\omega^2 \sin x_1)$. Les orbites sont données sur la figure 4.1.

Remarque 4.2.1. Si l'angle θ est petit, alors $\sin \theta \approx \theta$. L'équation (4.2) est alors linéaire :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

4.3 Linéarisation et perturbation du flot

On considère dans cette section 4.3, le système non linéaire autonome (4.1) (la généralisation au cas non autonome ne présente pas de réelles difficultés). On s'intéresse aux variations d'une solution donnée de (4.1) induites par une perturbation sur la condition initiale ou encore sur le système lui-même. Pour cela, on s'intéresse à la régularité (continuité, différentiabilité...) de l'application flot. Il est donc important de savoir si son domaine de définition \mathcal{D} est un ouvert ou non de $\mathcal{I} \times \Omega$. Commençons par le résultat suivant.

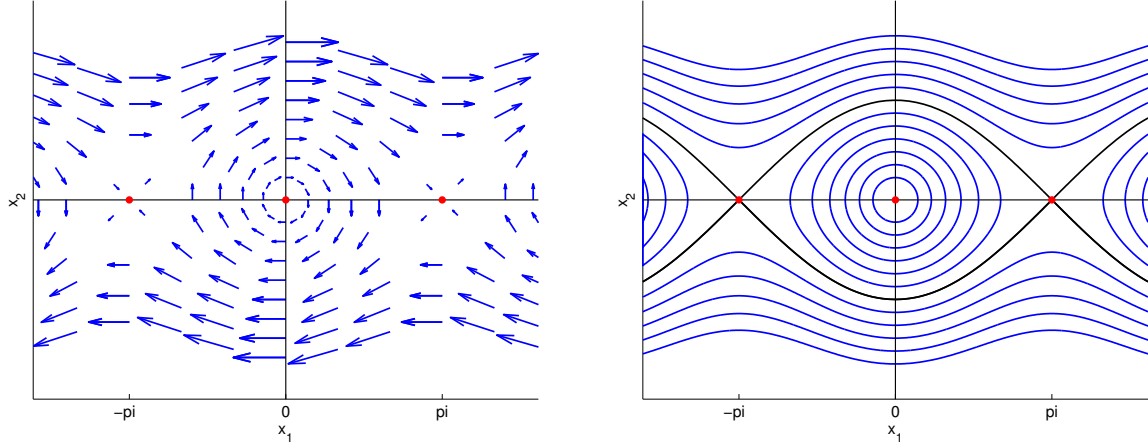


FIGURE 4.1 – Le champ de vitesses de phase défini par le second membre $f(x)$ est visible sur le sous-graphe de gauche. Les courbes de phase (ou orbites) en bleu sont données sur le sous-graphe de droite. Les courbes de phase fermées correspondent à des oscillations tandis que les autres correspondent aux rotations. Les courbes en noir sont appelées *séparatrices*. Enfin, on distingue trois points d'équilibre en rouge, 1 stable et 2 instables.

Théorème 4.3.1 – Régularité et différentielle de l'application partielle φ_t

Supposons que le second membre $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, du système autonome (4.1), soit de classe \mathcal{C}^1 sur Ω . Soit $\bar{x}_0 \in \Omega$, on note $\bar{x}(\cdot) := \varphi(\cdot, \bar{x}_0)$ la solution maximale de (4.1) vérifiant $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, définie sur $I(\bar{x}_0)$, un intervalle ouvert contenant 0. Sous ces hypothèses, pour tout $t \in I(\bar{x}_0)$, il existe $V \subset \Omega$ un voisinage de \bar{x}_0 , sur lequel φ_t est bien définie. De plus, $\varphi_t \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$ et sa différentielle en \bar{x}_0 suivant le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\varphi'_t(\bar{x}_0) \cdot v =: \delta x(t),$$

où $\delta x(t)$ est la solution au temps t de l'équation

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(s) = f'(\bar{x}(s)) \cdot \delta x(s), \\ \delta x(0) = v. \end{cases}$$

Remarque 4.3.1. On notera souvent δx_0 le vecteur v pour mettre en évidence le fait que c'est une perturbation de la condition initiale.

► Tout d'abord, puisque f est de classe \mathcal{C}^1 , toute solution de (4.1) est elle-même \mathcal{C}^1 . Soit $\bar{x}_0 \in \Omega$, on note $\bar{x}(\cdot) := \varphi(\cdot, \bar{x}_0)$ la solution maximale de (4.1) vérifiant $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, définie sur $I(\bar{x}_0)$, un intervalle ouvert contenant 0. Soit $t \in I(\bar{x}_0)$. Les ensembles $\mathcal{C}^0([0, t], \mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}^n)$ munis respectivement des normes $\|x(\cdot)\|_{\mathcal{C}^0} := \|x(\cdot)\|_\infty$ et $\|x(\cdot)\|_{\mathcal{C}^1} := \|x(\cdot)\|_\infty + \|\dot{x}(\cdot)\|_\infty$ sont des espaces de Banach. Définissons quelques applications qui vont nous être utiles.

1. Définissons l'application

$$\begin{aligned} F: \mathcal{C}^1([0, t], \Omega) &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0, t], \mathbb{R}^n) \\ x(\cdot) &\longmapsto F(x(\cdot)) \end{aligned}$$

telle que pour tout $s \in [0, t]$, $F(x(\cdot))(s) := f(x(s))$. On a F de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{C}^1([0, t], \Omega)$ car f est \mathcal{C}^1 sur Ω .

2. Définissons l'application linéaire

$$\begin{aligned} D: \mathcal{C}^1([0, t], \Omega) &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0, t], \mathbb{R}^n) \\ x(\cdot) &\longmapsto D(x(\cdot)) := \dot{x}(\cdot). \end{aligned}$$

Cette application est continue car $\|D(x(\cdot))\|_{\mathcal{C}^0} = \|\dot{x}(\cdot)\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|x(\cdot)\|_{\mathcal{C}^1}$. Ainsi, $\forall x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, t], \Omega)$, $\forall \delta x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}^n)$, $D'(x(\cdot)) \cdot \delta x(\cdot) = D(\delta x(\cdot)) = \widehat{\delta x}(\cdot)$.

3. Définissons l'application linéaire et continue

$$\begin{aligned} L: \mathcal{C}^1([0, t], \Omega) &\longrightarrow \Omega \\ x(\cdot) &\longmapsto L(x(\cdot)) := x(0). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, t], \Omega)$, $\forall \delta x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}^n)$, $L'(x(\cdot)) \cdot \delta x(\cdot) = L(\delta x(\cdot)) = \delta x(0)$.

On définit enfin l'application

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{C}^1([0, t], \Omega) \times \Omega &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0, t], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \\ (x(\cdot), x_0) &\longmapsto ((D - F)(x(\cdot)), L(x(\cdot)) - x_0), \end{aligned}$$

qui est une application de classe \mathcal{C}^1 puisque F est \mathcal{C}^1 . Nous voulons appliquer le théorème des fonctions implicites à Ψ en $(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0)$. Pour cela, nous devons vérifier que $\partial_{x(\cdot)} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0)$ est inversible dans $\mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}^n)$. Calculons cette différentielle :

$$\partial_{x(\cdot)} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0) \cdot \delta x(\cdot) = (\delta \dot{x}(\cdot) - F'(\bar{x}(\cdot)) \cdot \delta x(\cdot), \delta x(0)).$$

Elle est inversible si, pour tout $(y(\cdot), v) \in \mathcal{C}^0([0, t], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, on trouve un unique $\delta x(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}^n)$ tel que $\partial_{x(\cdot)} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0) \cdot \delta x(\cdot) = (y(\cdot), v)$. Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle ordinaire linéaire avec second membre :

$$\begin{cases} \widehat{\delta x}(s) = f'(\bar{x}(s)) \cdot \delta x(s) + y(s), & s \in [0, t], \\ \delta x(0) = v, \end{cases} \quad (4.3)$$

qui admet bien, en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.4.1, une unique solution dans $\mathcal{C}^1([0, t], \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de \bar{x}_0 dans Ω et une application $\varphi: V \rightarrow \mathcal{C}^1([0, t], \Omega)$ tels que, pour tout $x_0 \in V$,

$$\Psi(\varphi(x_0), x_0) = 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi(x_0)$ est solution sur $[0, t]$ de l'équation (4.1) et vérifie $\varphi(x_0)(0) = x_0$. Autrement dit, $\varphi(x_0) = \varphi(\cdot, x_0)$ sur $[0, t]$ et sa différentielle en \bar{x}_0 est donnée par

$$\begin{aligned} \delta x(\cdot) &:= \varphi'(\bar{x}_0) \cdot v = -(\partial_{x(\cdot)} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0))^{-1} \circ \partial_{x_0} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0) \cdot v \\ &= -(\partial_{x(\cdot)} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0))^{-1}(0, -v) \\ &= (\partial_{x(\cdot)} \Psi(\bar{x}(\cdot), \bar{x}_0))^{-1}(0, v). \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_t(\cdot)$ est bien définie et \mathcal{C}^1 sur V et $\delta x(t) = \varphi'_t(\bar{x}_0) \cdot v$ est la solution au temps t de (4.3) avec $y(\cdot) \equiv 0$ et v . Le théorème est démontré. ■

Remarque 4.3.2. Il est important de noter que le voisinage V dans le théorème précédent dépend du temps t .

Remarque 4.3.3. Rappelons les faits suivants. Si (X, d) est un espace métrique (quelconque) et F un espace de Banach, alors l'ensemble $\mathcal{C}_b^0(X, F)$ des applications continues et bornées de X dans F est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$. En particulier, muni de cette norme, l'ensemble $\mathcal{C}^0([t_0, t_1], F)$ des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$ et à valeurs dans un espace de Banach F est un espace de Banach. De même, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle compact et F un espace de Banach, alors l'espace $\mathcal{C}^1(I, F)$ des applications de classe \mathcal{C}^1 sur I et à valeurs dans F , muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$, est un espace de Banach.

Ainsi, d'après le théorème 4.3.1, pour tout $t \in I(\bar{x}_0)$ il existe un voisinage $V(t, \bar{x}_0) \subset \Omega$ de \bar{x}_0 , dépendant de t , tel que pour toute condition initiale $x_0 \in V(t, \bar{x}_0)$, la solution maximale $\varphi(\cdot, x_0)$ est définie sur tout l'intervalle $[0, t]$, i.e. $[0, t] \subset I(x_0)$. On est maintenant en mesure de montrer que le flot est défini sur un ouvert.

Corollaire 4.3.2

Le flot φ est défini sur un ouvert \mathcal{D} de $\mathcal{I} \times \Omega$.

► Le domaine de définition du flot est $\mathcal{D} := \{(t, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega \mid t \in I(x_0)\}$. Soit $(t, \bar{x}_0) \in \mathcal{D}$. Puisque $I(\bar{x}_0)$ est un ouvert (cf. théorème 2.4.1), il existe $\varepsilon > 0$ tel que la solution maximale $\varphi(\cdot, \bar{x}_0)$ est définie sur $[0, t + \varepsilon] \subset I(\bar{x}_0)$. Le théorème 4.3.1 implique que pour tout $x_0 \in V(t, \bar{x}_0)$, on a encore que $[0, t + \varepsilon] \subset I(x_0)$, c'est-à-dire que l'ensemble $]0, t + \varepsilon[\times V(t, \bar{x}_0)$, qui est un voisinage de (t, \bar{x}_0) dans $\mathcal{I} \times \Omega$, est inclus dans \mathcal{D} . ■

Cette propriété est donc très importante pour l'étude du flot et de sa dépendance par rapport aux conditions initiales : puisque φ et φ_t sont définies sur des ouverts, on peut étudier leur continuité et leur différentiabilité. Le théorème 4.3.1 nous montre que l'application φ_t est de classe \mathcal{C}^1 , elle est en particulier continue. Les solutions de l'équations différentielles (4.1) dépendent de façon continue de leur condition initiale. On verra par la suite que les solutions dépendent aussi de façon continue vis à vis de perturbations du système, ce qui justifie l'utilisation des équations différentielles pour modéliser des phénomènes réels pour lesquels on ne dispose que d'une approximation des données.

4.4 Équation linéarisée

Intéressons-nous à la différentielle de l'application partielle φ_t .

Définition 4.4.1 – Équation linéarisée

Soit $\bar{x}(\cdot)$ une solution ¹ de (4.1) définie sur $[0, T]$. L'équation différentielle sur $[0, T]$

$$\dot{\delta x}(t) = f'(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t),$$

est appelée *équation linéarisée de (4.1) autour de $\bar{x}(\cdot)$* . Cette équation est aussi appelée *équation variationnelle*.

On déduit du théorème 4.3.1 le résultat suivant.

Corollaire 4.4.1

Soit $\bar{x}_0 \in \Omega$ et $t \in I(\bar{x}_0)$. L'application $x_0 \mapsto \varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de \bar{x}_0 et sa différentielle en \bar{x}_0 suivant le vecteur $\delta x_0 \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\varphi'_t(\bar{x}_0) \cdot \delta x_0 = R(t, 0) \delta x_0,$$

où R est la résolvante de l'équation linéarisée de (4.1) autour de $\varphi(\cdot, \bar{x}_0)$.

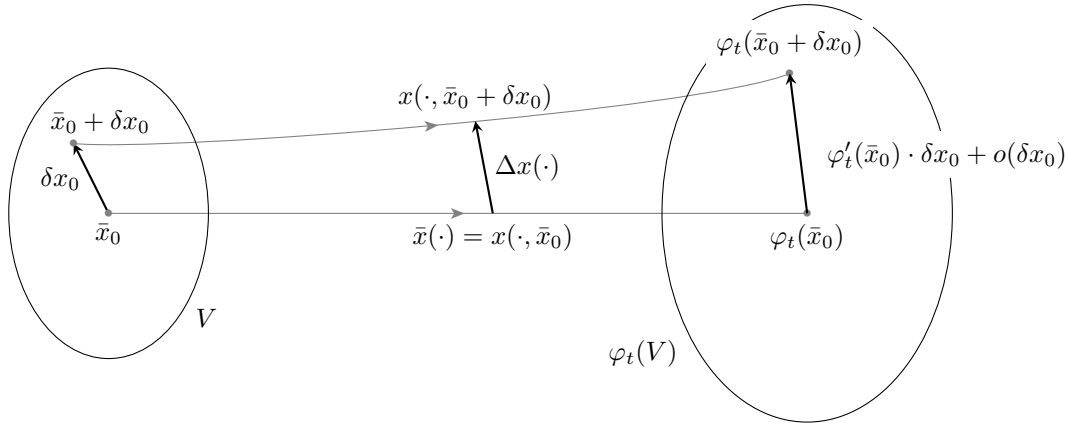
On peut donner une explication plus intuitive du rôle de l'équation linéarisée. On choisit une solution $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$ de l'équation (4.1), vérifiant $\bar{x}_0 := \bar{x}(0)$. On note $x(\cdot, \bar{x}_0 + \delta x_0)$, la solution (perturbée) sur $[0, T]$ de l'équation (4.1) de condition initiale $\bar{x}_0 + \delta x_0$ et on l'écrit sous la forme d'une perturbation de la solution d'origine, *i.e.* on écrit :

$$x(\cdot, \bar{x}_0 + \delta x_0) =: \bar{x}(\cdot) + \Delta x(\cdot) =: \bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot) + \dots,$$

où $\delta x(\cdot)$ est la variation à l'ordre 1. Autrement dit, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\delta x(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, \bar{x}_0) \cdot \delta x_0 = \varphi'_t(\bar{x}_0) \cdot \delta x_0$$

puisque l'on a bien sûr $x(t, x_0) = \varphi_t(x_0)$. Sur le schéma suivant, on retiendra que le voisinage V dépend de t .



Calculons une nouvelle fois, de manière peu rigoureuse, $\delta x(t)$ pour t fixé. Pour tout $s \in [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{x} + \delta x + \dots)(s) &= f(\bar{x}(s) + \delta x(s) + \dots) \\ &= f(\bar{x}(s)) + f'(\bar{x}(s)) \cdot \delta x(s) + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

et $x(0, \bar{x}_0 + \delta x_0) = \bar{x}_0 + \delta x_0 = \bar{x}(0) + \delta x(0)$. Ainsi, en tenant compte du fait que $\dot{\bar{x}}(s) = f(\bar{x}(s))$ dans (4.4), on voit que $\delta x(t)$ est la solution au temps t de

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(s) = f'(\bar{x}(s)) \cdot \delta x(s), \\ \delta x(0) = \delta x_0. \end{cases}$$

1. Nous notons ici par la même lettre, l'inconnue de l'équation différentielle et une solution de celle-ci, contrairement par exemple à la section 2.1 où est notée φ la solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Ceci afin de ne pas confondre avec le flot qui est aussi noté φ et qui est l'unique solution maximale.

L'équation linéarisée étant linéaire et homogène, sa solution est donnée par

$$\delta x(t) = R(t, 0) \delta x_0,$$

où R est la résolvante de l'équation linéarisée (c-a-d la même équation avec comme condition initiale $\delta x(0) = I_n$). On peut retrouver une troisième fois la différentielle de φ_t (ou avec nos notations ici $x(t, \cdot)$) en \bar{x}_0 et ce encore plus rapidement en utilisant l'équation intégrale, cf. théorème 2.2.3. En effet, si l'on écrit

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(x(s, x_0)) \, ds,$$

et si $x(t, x_0)$ est dérivable² par rapport à la condition initiale en \bar{x}_0 , alors on a en dérivant :

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, \bar{x}_0) \cdot \delta x_0 = \delta x_0 + \int_0^t f'(x(s, \bar{x}_0)) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(s, \bar{x}_0) \cdot \delta x_0 \right) \, ds,$$

On retrouve bien le résultat, puisque $x(s, \bar{x}_0) = \bar{x}(s)$, en remplaçant $\partial_{x_0} x(\cdot, \bar{x}_0) \cdot \delta x_0$ par la notation plus succincte $\delta x(\cdot)$.

4.5 Dépendance par rapport à un paramètre

Considérons maintenant une famille d'équations différentielles ordinaires dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^p$, de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda), \quad (4.5)$$

telle que la fonction f soit de classe \mathcal{C}^1 et telle que chaque application $f(\cdot, \lambda)$ soit un champ de vecteurs sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On s'intéresse maintenant à la dépendance des solutions de l'équation (4.5) par rapport au paramètre λ . Le paramètre λ peut être considéré comme une variable d'état constante au cours du temps. Ainsi, l'équation (4.5) est équivalente à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \lambda(t)), \\ \dot{\lambda}(t) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

qui est une équation différentielle dans \mathbb{R}^{n+p} associée au champ de vecteurs $F(x, \lambda) := (f(x, \lambda), 0)$. Ainsi les solutions de (4.5) dépendent du paramètre λ de la même façon que les solutions de (4.6) dépendent de la condition initiale. D'après le théorème 4.3.1, nous avons donc les propriétés suivantes.

- ⊛ Les solutions notées $x(\cdot, x_0, \lambda)$ de (4.5) dépendent de façon \mathcal{C}^1 , donc continue, du paramètre λ et de la condition initiale x_0 .
- ⊛ La différentielle de l'application $(x_0, \lambda) \mapsto x(\cdot, x_0, \lambda)$ en un point $(\bar{x}_0, \bar{\lambda})$ est l'application qui à $(\delta x_0, \delta \lambda)$ associe

$$\delta x(\cdot) := \frac{\partial x}{\partial x_0}(\cdot, \bar{x}_0, \bar{\lambda}) \cdot \delta x_0 + \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot, \bar{x}_0, \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda, \quad (4.7)$$

2. En exercice, il serait bon de vérifier si les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, cf. cours Intégration 1A, sont satisfaites.

solution de l'équation différentielle affine

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{\lambda}) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\bar{x}(s), \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda, \\ \delta x(0) = \delta x_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $\bar{x}(\cdot) := x(\cdot, \bar{x}_0, \bar{\lambda})$. D'après l'exemple 4.1.2, la solution de (4.8) est

$$\delta x(t) = R(t, 0) \delta x_0 + \int_0^t R(t, s) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\bar{x}(s), \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda \, ds, \quad (4.9)$$

où R est la résolvante de l'équation linéarisée $\dot{\delta x}(t) = \partial_x f(\bar{x}(t), \bar{\lambda}) \cdot \delta x(t)$.

Remarque 4.5.1. A partir de (4.7) et (4.9) on retrouve l'équation du corollaire 4.4.1

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, \bar{x}_0, \bar{\lambda}) \cdot \delta x_0 = R(t, 0) \delta x_0$$

et on a en plus

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \bar{x}_0, \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda = \int_0^t R(t, s) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\bar{x}(s), \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda \, ds.$$

4.6 Dépendance par rapport à l'instant initial

Considérons une équation différentielle non autonome,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (4.10)$$

telle que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{I} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On note $x(\cdot, t_0, x_0)$ la solution vérifiant la dynamique (4.10) et la condition initiale $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. La différentielle de l'application $t_0 \mapsto x(\cdot, t_0, x_0)$, $x_0 \in \Omega$ fixé, en un point $\bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ est l'application qui à $\delta t_0 \in \mathbb{R}$ associe

$$\delta x(\cdot) := \frac{\partial x}{\partial t_0}(\cdot, \bar{t}_0, x_0) \cdot \delta t_0,$$

solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) \cdot \delta x(t), \\ \delta x(\bar{t}_0) = -f(\bar{t}_0, x_0) \delta t_0, \end{cases}$$

où $\bar{x}(\cdot) := x(\cdot, \bar{t}_0, x_0)$.



Exercice 4.6.1. Retrouver l'expression de la différentielle à partir de l'équation intégrale.

De manière plus générale, la différentielle de l'application $(t_0, x_0) \mapsto x(\cdot, t_0, x_0)$ en un point $(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$ est donnée par

$$\delta x(\cdot) := \frac{\partial x}{\partial t_0}(\cdot, \bar{t}_0, \bar{x}_0) \cdot \delta t_0 + \frac{\partial x}{\partial x_0}(\cdot, \bar{t}_0, \bar{x}_0) \cdot \delta x_0,$$

solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) \cdot \delta x(t), \\ \delta x(\bar{t}_0) = -f(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \delta t_0 + \delta x_0, \end{cases}$$

où ici $\bar{x}(\cdot) := x(\cdot, \bar{t}_0, \bar{x}_0)$.

CHAPITRE 5
Stabilité des équilibres

Voir [5, 8]. Voir aussi le cours d'automatique de 1A.

CHAPITRE 6

Intégration numérique

Sommaire

6.1	Introduction	20
6.2	Méthodes de Runge-Kutta explicite	21
6.3	Méthodes de Runge-Kutta implicite	22
6.4	Méthodes de collocation	26
6.5	Ordre, consistance, stabilité et convergence	26
6.6	Méthodes de Runge-Kutta emboîtées, pas variable et sortie dense	27
6.7	Second membre discontinu et détection d'événements	27
6.8	Calcul des équations variationnelles	27
6.9	Introduction aux différences finies	28

6.1 Introduction

On désire calculer une approximation de la solution, notée $x(\cdot, t_0, x_0)$, sur l'intervalle $I := [t_0, t_f]$ du problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

où $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application suffisamment régulière, avec \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant $[t_0, t_f]$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 . On considère pour cela une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N := t_f$ de I donnée. On note $h_i := t_{i+1} - t_i$ pour $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, les *pas* de la subdivision et $h_{\max} := \max_i(h_i)$. L'idée est de calculer une approximation de la solution en les points de discrétisation, *i.e.* on souhaite approcher $x(t_i, t_0, x_0)$ pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On notera $x_h := (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^n)^N$ l'inconnue du problème discrétisé. Si on note $x_h^* := (x_1^*, \dots, x_N^*)$ une solution au problème discrétisé (défini ci-après), alors on souhaite que $x_i^* \approx x(t_i, t_0, x_0)$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Définition 6.1.1 – Méthode à un pas

On appelle *méthode à un pas*, toute méthode pour laquelle la valeur x_{i+1} est calculée en fonction de t_i , h_i et de la solution seulement au pas précédent, *i.e.* x_i :

$$x_{i+1} = x_i + h_i \Phi(t_i, x_i, h_i).$$

Remarque 6.1.1. La fonction Φ peut être calculée de manière “explicite”, on parlera alors de méthode à un pas explicite, ou de manière “implicite”, *i.e.* être obtenue comme la solution d'un problème. On parlera dans ce second cas, de méthode à un pas implicite.

Remarque 6.1.2. Pour simplifier les notations, nous ne noterons la plupart du temps que le premier pas : $x_1 = x_0 + h\Phi(t_0, x_0, h)$, $h := h_0 = t_1 - t_0$.

L'idée est donc que $x_1 \approx x(t_1, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t, t_0, x_0)) dt$. La méthode à un pas explicite la plus simple est ce que l'on appelle la *méthode d'Euler* qui consiste tout simplement à approcher l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t, t_0, x_0)) dt$ par $hf(t_0, x_0)$.

Définition 6.1.2 – Schéma d'Euler (1768)

On appelle *méthode (ou schéma) d'Euler explicite*, le schéma

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0).$$

L'idée évidente pour améliorer la précision numérique est d'approcher cette intégrale par une formule de quadrature ayant un ordre plus élevé. Si on exploite le point milieu, nous obtenons

$$x(t_1, t_0, x_0) \approx x_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x\left(t_0 + \frac{h}{2}, t_0, x_0\right)\right).$$

Le problème étant que l'on ne connaît pas la valeur de $x(\cdot, t_0, x_0)$ à l'instant $t_0 + \frac{h}{2}$, d'où l'idée d'approcher cette valeur par un pas d'Euler : $x(t_0 + \frac{h}{2}, t_0, x_0) \approx x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0)$. Nous obtenons ainsi le *schéma de Runge*.

Définition 6.1.3 – Schéma de Runge (1895)

On appelle *méthode (ou schéma) de Runge (explicite)*, le schéma

$$x_1 = x_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0)\right).$$

6.2 Méthodes de Runge-Kutta explicite

Définition 6.2.1 – Méthode de Runge-Kutta explicite

On appelle *méthode de Runge-Kutta explicite à s étages*, la méthode définie par le schéma

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, x_0) \\ k_2 &= f(t_0 + c_2h, x_0 + ha_{21}k_1) \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_0 + c_sh, x_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}k_j) \\ x_1 &= x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \end{aligned}$$

où les coefficients c_i , a_{ij} et b_i sont des constantes qui définissent précisément le schéma. On supposera toujours dans la suite que $c_1 = 0$ et $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, pour $i = 2, \dots, s$.


On représente en pratique ce schéma par le tableau de Butcher [3], cf. la table 6.1.

Exemple 6.2.1. Voici une liste d'exemples de schémas explicites très connus :

c_1					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss-1}	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s

TABLE 6.1 – Tableau de Butcher pour un schéma explicite à s étage.

<table> <tr><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td></tr> </table> <p>Euler (ordre 1)</p>	0		1		<table> <tr><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td></td><td>0 1</td></tr> </table> <p>Runge (ordre 2)</p>	0		1/2	1/2		0 1	<table> <tr><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>0 2/3</td></tr> <tr><td></td><td>1/4 0 3/4</td></tr> </table> <p>Heun (ordre 3)</p>	0		1/3	1/3	2/3	0 2/3		1/4 0 3/4	
0																					
1																					
0																					
1/2	1/2																				
	0 1																				
0																					
1/3	1/3																				
2/3	0 2/3																				
	1/4 0 3/4																				
<table> <tr><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>0 1/2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0 0 1</td></tr> <tr><td></td><td>1/6 2/6 2/6 1/6</td></tr> </table> <p>RK4 (ordre 4)</p>	0		1/2	1/2	1/2	0 1/2	1	0 0 1		1/6 2/6 2/6 1/6	<table> <tr><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>-1/3 1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1 -1 1</td></tr> <tr><td></td><td>1/8 3/8 3/8 1/8</td></tr> </table> <p>RK4, règle 3/8 (ordre 4)</p>	0		1/3	1/3	2/3	-1/3 1	1	1 -1 1		1/8 3/8 3/8 1/8
0																					
1/2	1/2																				
1/2	0 1/2																				
1	0 0 1																				
	1/6 2/6 2/6 1/6																				
0																					
1/3	1/3																				
2/3	-1/3 1																				
1	1 -1 1																				
	1/8 3/8 3/8 1/8																				

 **Exercice 6.2.1.** On considère le schéma de Heun, cf. exemple 6.2.1. Écrire le schéma de Runge-Kutta correspondant et donner explicitement l'application $\Phi(t_0, x_0, h)$.

6.3 Méthodes de Runge-Kutta implicite

Rappelons que la solution $x(\cdot, t_0, x_0)$ du problème de Cauchy (6.1) est aussi solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds. \quad (6.2)$$

Ainsi, on a

$$x(t_1, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t, t_0, x_0)) \, dt.$$

En introduisant, $g(t) := f(t, x(t, t_0, x_0))$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires dans sa formulation intégrale et ainsi obtenir l'existence d'un temps $\bar{t} \in]t_0, t_1[$ tel que

$$hg(\bar{t}) = \int_{t_0}^{t_1} g(t) \, dt, \quad h = t_1 - t_0.$$

Partant de cette idée, on définit le schéma

$$x_1 = x_0 + hf(t_0 + \alpha h, x_0 + \beta(x_1 - x_0)), \quad (6.3)$$

avec $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Remarquons alors que pour calculer x_1 avec cette formule, si $\beta \neq 0$, il nous faut déjà x_1 ! Autrement dit, ceci n'est pas une formule mais une équation si $\beta \neq 0$! On dit alors que x_1 est obtenu de manière implicite, on l'obtient en résolvant le système, c'est pourquoi nous parlerons de méthode implicite dans ce cas. Les cas extrêmes sont $\alpha = \beta = 0$ (la méthode d'Euler explicite) et $\alpha = \beta = 1$:

$$x_1 = x_0 + hf(t_1, x_1),$$

la *méthode d'Euler implicite*. On parle aussi de méthodes de Euler *avant* (explicite) et *arrière* (implicite). Pour améliorer la précision numérique, on peut considérer le *point milieu* ($\alpha = \beta = 1/2$) et obtenir en posant $k_1 := (x_1 - x_0)/h$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1) \\ x_1 &= x_0 + hk_1. \end{aligned}$$

Ici aussi, nous avons une méthode implicite puisque k_1 ne peut être obtenu qu'en résolvant l'équation $k_1 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1)$.

Voyons un dernier exemple. Au lieu de considérer le schéma (6.3), on peut approcher l'équation (6.2) par la méthode des *trapèzes*. Ceci consiste à considérer le schéma suivant :

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)).$$

Si on pose $k_1 := f(t_0, x_0)$ et $k_2 := 2(x_1 - x_0)/h - k_1$, alors $k_2 = f(t_1, x_1) = f(t_0 + h, x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2))$ et on peut écrire le schéma sous la forme :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, x_0) \\ k_2 &= f(t_0 + h, x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)) \\ x_1 &= x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Une fois de plus, k_2 ne peut être obtenu qu'en résolvant l'équation $k_2 = f(t_0 + h, x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2))$, après avoir calculé k_1 .

Définition 6.3.1 – Méthode de Runge-Kutta implicite

On appelle *méthode de Runge-Kutta à s étages*, la méthode définie par le schéma

$$\begin{aligned} k_i &= f(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \\ x_1 &= x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \end{aligned}$$

où les coefficients c_i , a_{ij} et b_i sont des constantes qui définissent précisément le schéma. On supposera toujours dans la suite que $c_1 = 0$ et $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$, pour $i = 1, \dots, s$. Si

$a_{ij} = 0$ pour $i \leq j$, alors on a une méthode explicite (ERK). Sinon, on parle de *méthode de Runge-Kutta implicite* (IRK). Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ et au moins un $a_{ii} \neq 0$, on parle de *méthode implicite de Runge-Kutta diagonale* (DIRK). Si de plus, tous les éléments diagonaux sont identiques, on parle de méthode implicite à *diagonale simple* (SDIRK).

On représente en pratique le schéma de Runge-Kutta par un tableau de Butcher [3], cf. la table 6.2.

c_1	a_{11}	\cdots	a_{1s}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	\cdots	a_{ss}
	b_1	\cdots	b_s


TABLE 6.2 – Tableau de Butcher pour un schéma à s étage.

Exemple 6.3.1. Voici une liste d'exemples de schémas implicites :

$\begin{array}{c c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$
Euler implicite	Point milieu	Trapèze

$1/2 - \sqrt{3}/6$	$1/4$	$1/4 - \sqrt{3}/6$
$1/2 + \sqrt{3}/6$	$1/4 + \sqrt{3}/6$	$1/4$
	$1/2$	$1/2$

Gauss à 2 étages, d'ordre 4

 **Exercice 6.3.1.** Écrire pour chaque tableau de l'exemple 6.3.1, le schéma de Runge-Kutta implicite correspondant.

D'une manière générale, nous devons donc résoudre un système pour calculer les k_i . On introduit l'application

$$\begin{aligned} G: (\mathbb{R}^n)^s &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^s \\ y &\longmapsto G(y) := (f(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j))_{1 \leq i \leq s} \end{aligned}$$

où $y := (k_1, \dots, k_s) \in (\mathbb{R}^n)^s \simeq \mathbb{R}^{ns}$. Posons,

$$F(y) := y - G(y). \quad (6.4)$$

Calculer les k_i revient à résoudre $F(y) = 0$. L'inconnue y est de taille ns tout comme le nombre d'équations $F(y) = 0$. Une première question naturelle est de se demander si le problème $F(y) = 0$ admet une solution. On a le résultat suivant, extrait de [6, Théorème 7.2] :

Théorème 6.3.1

Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On suppose f lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x de constante L . Si

$$h < \frac{1}{L \max_i (\sum_j |a_{ij}|)},$$

alors il existe une unique solution à l'équation (6.4). Si $f(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^k , alors les k_i , comme fonction de h , sont aussi de classe \mathcal{C}^k .



Exercice 6.3.2. Démontrer le théorème 6.3.1. Pour cela, démontrer l'existence et l'unicité de la solution à l'aide du théorème du point fixe, et démontrer la régularité des k_i à l'aide du théorème des fonctions implicites.

Voyons maintenant comment calculer la solution. Le système $F(y) = 0$ a la forme particulière

$$F(y) = y - G(y) = 0,$$

on peut donc utiliser une *méthode de point fixe* qui consiste à calculer l'itéré $k + 1$ à l'aide de l'itéré k par la formule

$$y^{(k+1)} = G(y^{(k)}),$$

à partir d'une condition initiale $y^{(0)}$. On s'arrête lorsque l'erreur $\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\| = \|F(y^{(k)})\|$ est suffisamment petite, ou si on dépasse un nombre d'itération maximal. Une autre possibilité, qui est plus préférable, est d'utiliser une *méthode de Newton*. Voir la section IV.8, page 118, de [7] pour plus de détails sur l'implémentation de la méthode dans le cadre des schémas de Runge-Kutta implicite. On rappelle l'itération de Newton :

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + d^{(k)},$$

où $d^{(k)}$ est solution du système linéaire

$$F'(y^{(k)}) \cdot d = -F(y^{(k)}).$$

L'application F est définie sur $(\mathbb{R}^n)^s$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^n)^s$. Donc son application dérivée en un point y , $F'(y)$, appartient à $\mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^s)$. On peut utiliser la notation matricielle

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial k_j}(y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_j}(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

et voir $F'(y)$ comme une matrice dont les éléments sont des matrices de taille $n \times n$. Par l'identification $(\mathbb{R}^n)^s \simeq \mathbb{R}^{ns}$, on peut voir aussi $F'(y)$ comme une matrice de taille $ns \times ns$. Calculons les dérivées partielles des applications composantes. Pour $1 \leq i, j \leq s$, et pour $d_j \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial k_j}(y) \cdot d_j &= \delta_{ij} d_j - \frac{\partial f}{\partial x}(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{l=1}^s a_{il} k_l) h a_{ij} d_j \\ &= \left(\delta_{ij} I_n - h a_{ij} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{l=1}^s a_{il} k_l)}_{=: M_i} \right) d_j \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_j}(y) = \delta_{ij} I_n - h a_{ij} M_i \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, en faisant l'indentification $(\mathbb{R}^n)^s \simeq \mathbb{R}^{ns}$, on obtient :

$$\begin{aligned} F'(y) &= I_{ns} - G'(y) \\ &= I_{ns} - h \begin{pmatrix} a_{11} M_1 & \cdots & a_{1s} M_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} M_s & \cdots & a_{ss} M_s \end{pmatrix} \\ &= I_{ns} - h M(A \otimes I_n) \in \mathbf{M}_{ns}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

où $A := (a_{ij}) \in \mathbf{M}_s(\mathbb{R})$ est la matrice constituée des coefficients a_{ij} décrivant le schéma de Runge-Kutta, où M est la matrice par blocs diagonale

$$M := \begin{pmatrix} M_1 & \cdots & 0_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & M_s \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{ns}(\mathbb{R})$$

et où $A \otimes B$ est le *produit de Kronecker* de la matrice A par la matrice B . Si $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} B & \cdots & a_{1n} B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} B & \cdots & a_{mn} B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{mp,nq}(\mathbb{R}).$$

Remarque 6.3.1. Dans la section IV.8, page 118, de [7], on propose d'approcher les M_i par une même matrice :

$$M_i \approx B := \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0),$$

car on considère de petits pas h et on suppose donc que B est une bonne approximation des M_i . Ceci simplifie le calcul de $F'(y)$ puisqu'alors :

$$F'(y) \approx I_{ns} - h(A \otimes B).$$

6.4 Méthodes de collocation



Section en cours de réalisation.

6.5 Ordre, consistance, stabilité et convergence



Section en cours de réalisation.

6.6 Méthodes de Runge-Kutta emboîtées, pas variable et sortie dense



Section en cours de réalisation.

6.7 Second membre discontinu et détection d'événements



Section en cours de réalisation.

6.8 Calcul des équations variationnelles

Dans cette section, on s'intéresse à la dérivée de la solution $x(\cdot, t_0, x_0)$, du problème de Cauchy (6.1), par rapport à la condition initiale x_0 . Si on note $\bar{x}(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$, alors \bar{x} est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

et si note $\delta x(\cdot) := \partial_{x_0} x(\cdot, t_0, x_0) \cdot \delta x_0$, pour $\delta x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors, d'après le théorème 4.3.1,¹ $\delta x(\cdot)$ est solution des équations variationnelles (ou équations linéarisées) :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) \cdot \delta x(t), \\ \delta x(t_0) = \delta x_0. \end{cases}$$

On voit dans cette équation que pour calculer $\delta x(t)$, nous avons besoin de $x(\cdot, t_0, x_0)$ sur tout l'intervalle $[t_0, t]$. D'un point de vue pratique, on introduit la paire $X = (x, \delta x)$. Pour calculer les équations variationnelles, on résout alors le problème de Cauchy augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (\dot{x}(t), \dot{\delta x}(t)) = (f(t, x(t)), \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) \cdot \delta x(t)), \\ X(t_0) = (x(t_0), \delta x(t_0)) = (x_0, \delta x_0). \end{cases}$$

Remarque 6.8.1. Pour simplifier les calculs, il est possible d'utiliser la *différentiation interne de Bock* [2]. Ceci consiste à approcher le second membre des équations variationnelles par différences finies. On remplace la dérivée directionnelle par une approximation à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) \cdot \delta x(t) \approx \frac{f(t, \bar{x}(t) + \eta \delta x(t)) - f(t, \bar{x}(t))}{\eta}$$

avec $\eta > 0$ petit. On peut prendre η de l'ordre de la racine carrée de l'épsilon machine, cf. section 6.9 ci-après.

1. Le théorème est dans le cas autonome, mais il n'est pas très difficile de généraliser au cas non autonome.

6.9 Introduction aux différences finies

Soient f une fonction lisse de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , x un point de \mathbb{R}^n et h un vecteur de \mathbb{R}^n . On note $g: t \mapsto f(x + th)$. Pour t proche de 0, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} g^{(k)}(0) + R_n(t), \quad R_n(t) = o(t^n),$$

et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|R_n(t)| \leq \frac{M_n |t|^{n+1}}{(n+1)!},$$

où M_n est une constante positive majorant la dérivée à l'ordre $n+1$. De même,

$$g(-t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} g^{(k)}(0) + o(t^n).$$

Formule des différences finies avants. La méthode des différences finies avants consiste à approcher la différentielle de f en x dans la direction de h par la formule suivante :

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) + \frac{t}{2} g''(0) + \frac{t^2}{3!} g^{(3)}(0) + o(t^2). \quad (6.5)$$

On obtient ainsi une approximation de $g'(0) = f'(x) \cdot h$ **d'ordre 1** si $g''(0) \neq 0$ ou au moins d'ordre 2 sinon. Notons $\text{num}(g, t)$ la valeur $g(t)$ calculée numériquement et supposons que l'on puisse majorer l'erreur relative du calcul numérique par :

$$|\text{num}(g, t) - g(t)| \leq \theta L_f,$$

où L_f est une borne de la valeur de $g(\cdot)$ sur le domaine d'intérêt. Ainsi, pour $t > 0$ petit, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{num}(g, t) - \text{num}(g, 0)}{t} - g'(0) \right| &= \left| \frac{g(t) + e_1 - g(0) - e_2}{t} - g'(0) \right| \\ &= \left| \frac{R_1(t)}{t} + \frac{e_1 - e_2}{t} \right| \\ &\leq \frac{M_1 t}{2} + 2 \frac{\theta L_f}{t} =: \phi(t). \end{aligned}$$

La fonction ϕ atteint son minimum en la valeur

$$t = 2 \sqrt{\frac{\theta L_f}{M_1}},$$

et si on suppose que le ratio L_f/M_1 est d'un ordre de grandeur peu élevé, alors le choix suivant pour t est presque optimal :

$$\bar{t} := \sqrt{\theta},$$

et on obtient ainsi une approximation de l'erreur totale $\phi(\bar{t})$ proportionnelle à $\sqrt{\theta}$.

Exemple 6.9.1. On considère la fonction $f(x) = -\cos(x)$. On échantillonne l'intervalle $[0, 2\pi]$ en $N := 100$ points. On note $x_i := \frac{2\pi}{N-1}i$, $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, les points de discrétisation. On note $g_i(t) := f(x_i + th)$, $h := 1$, et on calcule l'erreur au point x_i :

$$e_i(t) := \left| \frac{\text{num}(g_i, t) - \text{num}(g_i, 0)}{t} - g'_i(0) \right|.$$

On moyenne l'ensemble des erreurs :

$$E(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N e_i(t).$$

L'idée est alors de voir si en effet, $E(t)$ colle à la fonction $\phi(t)$, avec $M_1 = 1$ et $L_f = 1$, et voir si $E(t)$ est minimale pour $t = 2\sqrt{\theta}$. Pour cela, nous allons introduire du bruit dans le calcul de g_i en définissant l'opération $\text{num}(g, t)$ par la formule suivante :

$$\text{num}(g, t) := g(t) + 10^{-12} \times \text{rand}(-1, 1),$$

où $\text{rand}(-1, 1)$ fournit un nombre aléatoire uniformément distribué entre -1 et 1 . L'erreur numérique² θ a donc un ordre de grandeur de 10^{-12} . La figure 6.1 montre une très bonne cohérence entre l'erreur théorique et l'erreur pratique. On retrouve bien le minimum d'erreur pour $t \approx 2\sqrt{\theta}$.

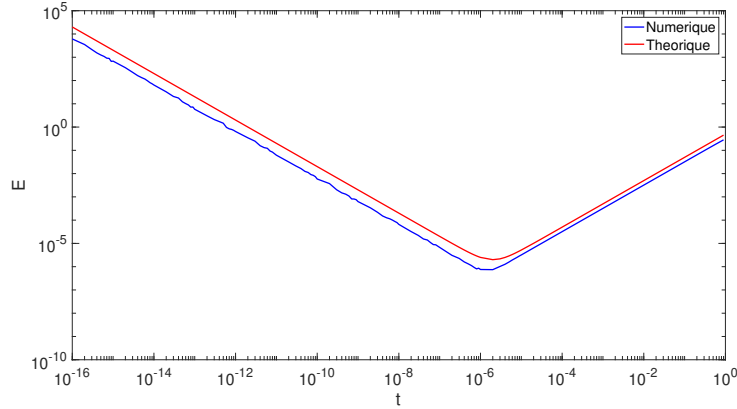


FIGURE 6.1 – Erreur moyenne, en fonction du pas t , de l'approximation de la dérivée par différences finies avant pour la fonction $f(x) = -\cos(x)$.

Formule des différences finies centrées. La méthode des différences finies centrées consiste à approcher la différentielle de f en x dans la direction de h par la formule suivante :

$$\frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} = \frac{g(t) - g(-t)}{2t} = g'(0) + \frac{t^2}{3!} g^{(3)}(0) + \frac{t^4}{5!} g^{(5)}(0) + o(t^4). \quad (6.6)$$

On obtient ainsi une approximation de $g'(0) = f'(x) \cdot h$ **d'ordre 2** si $g^{(3)}(0) \neq 0$ ou au moins d'ordre 4 sinon.

2. Notons que la fonction cosinus calculée numériquement introduit une erreur numérique de l'ordre de l'épsilon machine, *i.e.* 10^{-16} .

Remarque 6.9.1. Les différences finies centrées sont d'ordre plus élevé mais demandent plus d'évaluations de la fonction f .



Exercice 6.9.1. Sachant que l'on commet une erreur numérique lors du calcul de g en un point t , quel est le choix optimal pour t pour approcher la valeur de $g'(0)$ par différences finies centrées ? Quelle est alors la valeur de la borne de l'erreur totale ?

Exemple 6.9.2. On considère le même exemple qu'en 6.9.1. La figure 6.2 compare l'erreur théorique et l'erreur pratique. Comparer avec la figure 6.1.

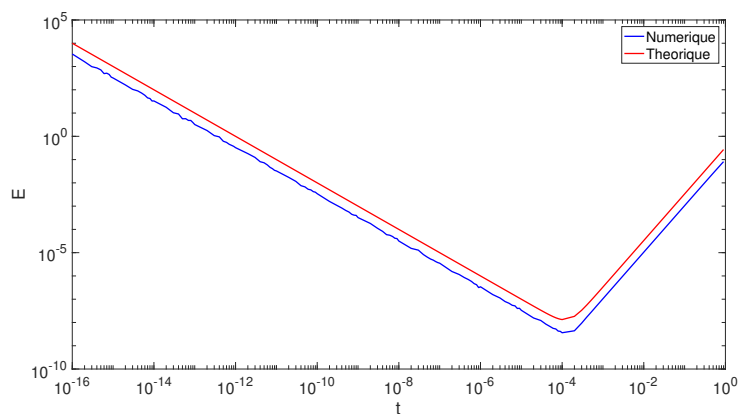


FIGURE 6.2 – Erreur moyenne, en fonction du pas t , de l'approximation de la dérivée par différences finies centrées pour la fonction $f(x) = -\cos(x)$.

Bibliographie

- [1] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, MIR, Moscou (1974). \leftrightarrow 1.
- [2] H. G. Bock, *Numerical treatment of inverse problems in chemical reaction kinetics*, in K. H. Hebert, P. Deuffhard, and W. Jager, editors, *Modelling of chemical reaction systems*, volume 18 of *Springer series in Chem. Phys.*, pages 102–125, 1981. \leftrightarrow 27.
- [3] J. C. Butcher, *Numerical Methods For Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 2003. \leftrightarrow 21 et 24.
- [4] J. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences (2006). \leftrightarrow 3, 6, 8 et 9.
- [5] J. Gergaud, *Équations différentielles ordinaires*, pdf. \leftrightarrow 7, 8, 9, 11 et 19.
- [6] E. Hairer, S. P. Nørsett & G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, vol 8 of *Springer Serie in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, second edn (1993). \leftrightarrow 24.
- [7] E. Hairer & G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems*, vol 14 of *Springer Serie in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, second edn (1996). \leftrightarrow 25 et 26.
- [8] F. Jean, *Stabilité et Commande des Systèmes Dynamiques. Cours et exercices corrigés*, Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, 2011, 197 pages. pdf. \leftrightarrow 7, 8, 9 et 19.
- [9] E. D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic systems*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1998. pdf. \leftrightarrow 8.
- [10] C. Wagschal, *Dérivation, intégration*, Hermann, 1999. \leftrightarrow 4.

Index

A	
Absolue continuité.....	4
Application	
localement lipschitzienne	7
C	
Champ de vecteurs	2
D	
Différences finies.....	28
Différentiation interne de Bock	27
E	
Équation	
différentielle	2
intégrale	4, 5
linéarisée	15, 27
variationnelles	15, 27
F	
Flot	10
M	
Méthode de Newton	25
O	
Orbite.....	11
Orbite périodique.....	12
P	
Point d'équilibre.....	12
Problème	
de Cauchy.....	2
Produit de Kronecker.....	26
R	
Résolvante.....	10
S	
Schéma	
d'Euler	21
de Runge.....	21
de Runge-Kutta explicite	21, 23
de Runge-Kutta implicite.....	23
Solution	
faible d'un problème de Cauchy.....	5
forte d'un problème de Cauchy	2
globale	3
maximale.....	3
T	
Théorème	
d'échappement	8
de Cauchy-Lipschitz	7
de Cauchy-Lipschitz generalisé.....	7
de régularité du flot	12