



Examen

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. **Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.**

▷ **Exercice 1** (5 points). On considère le problème de contrôle optimal

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad t_f \text{ libre},$$

de dynamique

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f],$$

où f_0 et f sont lisses sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.

1.1. On pose $t = t_f \cdot s$, $s \in [0, 1]$, en faisant de t_f un état supplémentaire qui vérifie la dynamique triviale ($' = d/ds$)

$$t'_f(s) = 0.$$

Poser $\tilde{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et montrer que le problème se réécrit

$$\int_0^1 \tilde{f}^0(\tilde{x}(s), u(s)) ds \rightarrow \min,$$

$$\tilde{x}'(s) = \tilde{f}(\tilde{x}(s), u(s)), \quad u(s) \in U, \quad s \in [0, 1],$$

avec $\tilde{f}^0(\tilde{x}, u)$ et $\tilde{f}(\tilde{x}, u)$ que l'on précisera.

1.2. Montrer que le hamiltonien de ce nouveau problème est

$$\tilde{H}(\tilde{x}, u, \tilde{p}) = t_f H(x, u, p)$$

où $H(x, u, p) = p^0 f^0(x, u) + p f(x, u)$ et $\tilde{p} = (p, p_{t_f}) \in (\mathbf{R}^{n+1})^*$.

Soit $\bar{u} \in \mathcal{L}_m^\infty([0, 1])$ un contrôle optimal, et soit $\tilde{\bar{x}} = (\bar{x}, \bar{t}_f)$ la trajectoire associée (*resp.* $\tilde{\bar{p}} = (\bar{p}, \bar{p}_{t_f})$ l'état adjoint associé).

1.3. Montrer que $\bar{p}'_{t_f}(s) = \text{cte}$, $s \in [0, 1]$.

1.4. Écrire les relations de transversalité vérifiées par \bar{p}_{t_f} et conclure que

$$H(\bar{x}(s), \bar{u}(s), \bar{p}(s)) = 0, \quad s \in [0, 1] \text{ (p.p.)}$$

▷ **Exercice 2** (5 points). Soient $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $U \subset \mathbf{R}^m$; soient $\bar{u} \in \mathcal{L}_m^\infty([0, t_f])$ (où $t_f > 0$ est fixé) une fonction essentiellement bornée à valeurs dans U et soit \bar{x} une trajectoire associée :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}$$

On fixe $s \in]0, t_f[$, point de Lebesgue de \bar{u} , et une valeur $u \in U$; pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on définit u_ε la fonction égale partout à \bar{u} sauf sur $[s - \varepsilon, s]$ où l'on pose $u_\varepsilon(t) := u$. On note x_ε la solution de

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}$$

2.1. Donner sans la justifier l'expression de $x_\varepsilon(s) - \bar{x}(s)$.

On définit $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ par $g(t, x) := f(x, \bar{u}(t))$. On remarque que résoudre

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}, \quad x(s) = x_s,$$

où x_s est une condition initiale dans \mathbf{R}^n , est équivalent à trouver un zéro de¹ $F : W_n^{1,\infty}([0, t_f]) \times \mathbf{R}^n \rightarrow L_m^\infty([0, t_f]) \times \mathbf{R}^n$ définie par²

$$F(x, x_s) := \begin{bmatrix} \dot{x} - g(t, x) \\ x(s) - x_s \end{bmatrix}$$

2.2. On admet que F de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(\bar{x}, \bar{x}(s))$. Donner sans les justifier les expressions de

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}(s)) \cdot \delta x \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x_s}(\bar{x}, \bar{x}(s)) \cdot \delta x_s$$

pour δx et δx_s dans $W_n^{1,\infty}([0, t_f])$ et \mathbf{R}^n , respectivement.

2.3. Justifier l'existence d'une fonction implicite $\varphi : x_s \mapsto \varphi(x_s)$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, sur un voisinage de $(\bar{x}, \bar{x}(s))$, $F(x, x_s) = 0$ si et seulement si $x = \varphi(x_s)$, et donner l'expression de $\varphi'(\bar{x}(s)) \cdot \delta x_s$ pour $\delta x_s \in \mathbf{R}^n$.

2.4. En déduire l'expression de $x_\varepsilon(t_f) - \bar{x}(t_f)$.

1. On rappelle que $W^{1,\infty}([0, t_f])$ est l'ensemble des fonctions qui sont des primitives de (classes de) fonctions dans $L^\infty([0, t_f])$.

2. Par $\dot{x} - g(t, x)$ on entend la (classe de) fonction $t \mapsto \dot{x}(t) - g(t, x(t))$.

▷ **Exercice 3** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min } \int_0^{t_f} -x(t)u(t) dt \\ \dot{x}(t) = x(t) - x(t)u(t), \quad u(t) \in [0, u_{\max}], \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)} \\ x(0) = x_0 > 0, \quad x(t_f) \text{ libre,} \end{cases}$$

où $t_f > 0$ et $u_{\max} \in]0, 1[$ sont fixés. Résoudre (P_1) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. On commencera par montrer qu'un état optimal solution vérifie $x(t) > 0$ pour $t \in [0, t_f]$.

▷ **Exercice 4** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_2) \begin{cases} \text{Min } \int_0^{t_f} u^2(t) dt \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)} \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = 2t_f + 10, \end{cases}$$

où $t_f > 0$ est libre. Résoudre (P_2) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.