



Sujet d'examen – Contrôle optimal

Consignes.

- Documents autorisés : une feuille A4 recto-verso écrite à la main ;
- Durée : 1h.

Partie 1 (Barème prévisionnel : 12 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(q_0, u(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u(t)\|^2 dt \longrightarrow \min, \\ \dot{q}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.,} \quad q(0) = q_0, \\ q_0 \in \mathbb{S}^1, \quad q(t_f) = q_1, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , où $q := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et où $q_1 := (3, 0)$ et $t_f > 0$ sont fixés. On rappelle que \mathbb{S}^1 est la sphère de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

▷ **Exercice 1** (8 points – on prendra la note max entre cet exercice et le devoir 1).

1.1. Dessiner dans le plan (x, y) les contraintes initiales $q_0 \in \mathbb{S}^1$ et finales $q(t_f) = q_1$, la courbe $q(t)$, $t \in [0, t_f]$ qui minimise la longueur entre $q(0)$ et $q(t_f)$ tout en respectant les contraintes $q(0) \in \mathbb{S}^1$ et $q(t_f) = q_1$. Tracer la droite tangente à \mathbb{S}^1 en le point $q(0)$.

1.2. Écrire les conditions initiales $q_0 \in \mathbb{S}^1$ sous la forme $c(q_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$ et préciser m .

Soit (q, p, p^0, u) une BC-extrémale.

1.3. Montrer que la BC-extrémale est normale. On fixe alors $p^0 = -1$.

1.4. Montrer à l'aide des conditions de transversalité que le vecteur $p_0 := p(0)$ est orthogonal à la droite tangente aux contraintes au point q_0 .

1.5. Calculer la BC-extrémale : montrer que $q_0 = q_1 / \|q_1\|$, donner p_0 , et calculer la longueur

$$\int_0^{t_f} \|u(t)\| dt.$$

▷ **Exercice 2** (4 points).

2.1. Montrer que pour toute extrémale normale (q, p, u) , le contrôle $t \mapsto u(t)$ est lisse.

2.2. Indiquer si l'on doit utiliser une méthode de tir simple ou de tir multiple pour la résolution numérique.

2.3. On note $z = (q, p)$ et $z(\cdot, q_0, p_0)$ la solution de $\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t), \bar{u}(z(t)))$, $z(0) = (q_0, p_0)$, où H est le pseudo-hamiltonien, où $\vec{H} = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$ et où \bar{u} est donné par la condition de maximisation du hamiltonien. Donner la fonction de tir $S(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^4$ associée au problème de contrôle (on aura éliminé le multiplicateur λ associé à $c = 0$ et on pourra utiliser la notation suivante : $q_0 = (x_0, y_0)$ et $p_0 = (\alpha, \beta)$).

Partie 2 (Barème prévisionnel : 8 points). On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f],$$

où $q(\cdot)$ et $u(\cdot)$ sont à valeurs dans \mathbb{R} , sous les conditions aux limites $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ (q_0 et \dot{q}_0 sont fixés), $\dot{q}(t_f) = 0$ et $q(t_f)$ libre.

▷ **Exercice 3** (8 points – on prendra la note max entre cet exercice et le devoir 2).

3.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ en posant $x := (q, \dot{q})$, avec f que l'on précisera.

3.2. Écrire le pseudo-hamiltonien du problème.

Soit (x, p, p^0, u) une BC-extrémale.

3.3. Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint $p = (p_1, p_2)$.

3.4. Montrer que p_2 ne s'annule jamais.

3.5. Montrer que u doit être constant.