



## Examen

**Durée 2H.** Le barème prévisionnel est indiqué.

**Documents autorisés :** une feuille recto-verso manuscrite.

**Nota bene :** les parties I et II sont à rendre sur des copies séparées.

### Partie I

Soient  $t_f > 0$ ,  $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$ , et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications lisses, et  $m \leq n$ . Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \int_0^{t_f} f^0(x(s), u(s)) ds \rightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f], \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

▷ **Exercice 1** (5 points). Soit  $\bar{u}(\cdot) \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$  un contrôle optimal, et soit  $\bar{x}(\cdot)$  la trajectoire associée (resp.  $\bar{p}(\cdot)$  l'état adjoint associé). On rappelle que la variable duale du coût  $p^0$  est choisie telle que  $p^0 \leq 0$ .

**1.1.** Montrer que pour tout  $t \in [0, t_f]$  p.p. :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) \leq 0$$

On fait désormais l'hypothèse (dite de *Legendre*) qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) \leq -\alpha I_m, \quad t \in [0, t_f],$$

où  $I_m$  est la matrice identité d'ordre  $m$ .

**1.2.** Soit  $t \in [0, t_f]^1$ , montrer qu'il existe des voisinages ouverts  $Z_t$  de  $(\bar{x}(t), \bar{p}(t))$  et  $U_t$  de  $\bar{u}(t)$ , respectivement, et une fonction lisse  $\varphi$  définie sur  $Z_t$ , tels que pour tout  $(x, p, u) \in Z_t \times U_t$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0 \iff u = \varphi(x, p).$$

**1.3.** On définit  $h(x, p) = H(x, p, \varphi(x, p))$  sur  $Z_t$ . Montrer qu'en  $t$  on a

$$\dot{\bar{x}}(t) = \frac{\partial h}{\partial p}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)), \quad \dot{\bar{p}}(t) = -\frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)).$$

---

1. On rappelle que  $t$  doit être un point de Lebesgue de  $\bar{u}(\cdot)$ .

- ▷ **Exercice 2** (5 points). On considère le cas  $p^0 = 0$  ; on ne considère donc que les extrémales anormales. On rappelle qu'une extrémale d'un problème de contrôle optimal est une solution  $(x(\cdot), p(\cdot))$  du système hamiltonien associé.

**2.1.** On considère le cas suivant :  $n = m = 1$  et  $f(x, u) = f_0(x) + u$  où  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse. Montrer qu'il n'existe aucune extrémale anormale.

**2.2.** On considère le cas suivant :  $n = 2, m = 1$  et  $f(x, u) = f_0(x) + u f_1(x)$  où :

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2).$$

Trouver le contrôle associé aux extrémales anormales et écrire le système hamiltonien correspondant.

## Partie II

- ▷ **Exercice 3** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant (avec les notations habituelles) :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \int_0^{t_f} (2a x(t) u(t) + a^2 u^2(t)) dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = \frac{1}{a} x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où  $a > 0$  est fixé,  $x_f$  est donné et où  $t_f = \frac{\pi}{2} a$ .

Résoudre le problème  $(P_1)$  en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. On fournira la commande optimale, l'état associé et également l'état adjoint.

**Rappel :** La solution de l'équation différentielle :  $\ddot{y}(t) + c y(t) = 0, c > 0$ , s'écrit sous la forme :  $y(t) = \lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t), (\lambda, \mu, \beta) \in \mathbb{R}^3$ .

- ▷ **Exercice 4** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \int_0^{t_f} u^2(t) dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) - 2t_f - 10 = 0, \end{cases}$$

où  $t_f > 0$  est libre.

Résoudre le problème  $(P_2)$  en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.