



Sujet d'examen – Contrôle optimal

Consignes.

- Document autorisé : une feuille A4 recto-verso écrite à la main ;
- Durée : 1h30.

▷ **Exercice 1** (10 points). On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}, \quad |u(t)| \leq 1,$$

où $q(\cdot)$ et $u(\cdot)$ sont à valeurs dans \mathbb{R} , sous les conditions aux limites $q(0) = a$, $\dot{q}(0) = b$ (a et b sont des réels connus), $q(t_f) = 0$ et $\dot{q}(t_f)$ libre.

1.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ en posant $x \stackrel{\text{def}}{=} (q, \dot{q})$, avec f que l'on précisera.

1.2. Écrire le pseudo-hamiltonien associée au problème.

Soit (x, p, p^0, u) une BC-extrémale, c-a-d une solution du principe du maximum de Pontryagin. On note l'état adjoint $p = (p_1, p_2)$.

1.3. Donner la condition sur le pseudo-hamiltonien au temps final t_f .

1.4. Montrer que p_2 n'est pas identiquement nul.

1.5. Donner la condition de transversalité vérifiée par $p_2(t_f)$.

1.6. En déduire que p_2 est de signe constant sur $[0, t_f]$.

1.7. En déduire que u est constant soit égal à 1, soit -1 .

1.8. On suppose que $a = -1$, $b = 0$ et $u \equiv 1$. Calculer le temps minimal t_f et donner $p(0)$.

▷ **Exercice 2** (6 points - on prendra la note max entre cet exercice et le devoir). On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} x_1(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t) dt \\ \dot{x}(t) = (x_2(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = (0, 0). \end{cases}$$

Dans ce problème, $x(t) \in \mathbb{R}^2$ et $u(t) \in \mathbb{R}$. On cherche ici à minimiser un compromis entre la distance parcourue $x_1(t_f)$ et l'énergie dépensée (faisant intervenir la norme L^2 du contrôle). Soit (x, p, p^0, u) la BC-extrémale du problème ci-dessus (supposant qu'elle est unique), c-a-d le 4-uplet solution du principe du maximum de Pontryagin. Donner $x(t)$, $p(t)$, p^0 et $u(t)$ en fonction de t_f qui est un paramètre fixé du problème.

▷ **Exercice 3** (4 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) \stackrel{\text{def}}{=} t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2(t) + u^2(t)) \, dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

avec $x_f > 0$ donné. Résoudre le problème (pour le cas normal $p^0 = -1$) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.

Rappel : La solution de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 0,$$

s'écrit sous la forme

$$y(t) = \alpha \cosh(t) + \beta \sinh(t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

ou bien de manière équivalente

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

car

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Pour mémoire on a également

$$\operatorname{argsh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad z \in \mathbb{R}.$$