



Sujet d'examen — Contrôle optimal

Consignes.

- Document autorisé : une feuille A4 recto-verso écrite à la main ;
- Durée : 1h30.

▷ **Exercice 1** (8 points). On considère le problème de temps minimal pour

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.,} \quad |u(t)| \leq 1,$$

où $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$ sont à valeurs dans \mathbb{R} , sous les conditions aux limites $x(0) = a$, et $x(t_f) = b$. Les paramètres a et b sont supposés connus et vérifient $-1 < a < b < 1$. La variable t_f est le temps final que l'on cherche à minimiser.

1.1. Écrire le pseudo-hamiltonien associée au problème.

1.2. Donner le contrôle maximisant en fonction de p .

Soit (x, p, p^0, u) une BC-extrémale, c-à-d une solution du principe du maximum de Pontryagin.

1.3. Donner la condition sur le pseudo-hamiltonien au temps final t_f .

1.4. Rappeler pourquoi la condition précédente sur le pseudo-hamiltonien est vraie tout au long de l'extrémale et pas seulement au temps final t_f .

1.5. Montrer que $p(t) = e^t \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante.

1.6. En déduire que $\alpha \neq 0$.

On dit que le contrôle commute en un temps t^* si $p(t^*) = 0$ et p est non constant sur tout voisinage de t^* . On parle alors de temps de commutation.

1.7. En déduire le nombre de commutation.

1.8. Montrer que $p^0 \neq 0$. On fixera $p^0 = -1$ pour la suite.

1.9. Déterminer α et t_f et justifier que $t_f > 0$.

▷ **Exercice 2** (2 points). On considère un problème de contrôle optimal sous la forme de Lagrange avec une condition initiale, un temps initial et un temps final (noté t_f) fixés. La variable d'état est de dimension 4 et elle est notée $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. On suppose que la condition terminale s'écrit $c(x(t_f)) = 0$ avec :

$$c(x) = (r^2(x) - r_f^2, \quad x_3 + \alpha x_2, \quad x_4 - \alpha x_1),$$

où $r^2(x) = x_1^2 + x_2^2$, $r_f > 0$ et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. On note $\lambda \in \mathbb{R}^l$ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte terminale.

2.1. Quelle est la dimension de λ , c'est-à-dire la valeur de l ?

2.2. Donner la condition de transversalité liant le vecteur adjoint p , l'état x et λ au temps final.

2.3. Écrire la condition de transversalité sous la forme

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \Psi_i(x(t_f), p(t_f)), \quad i = 1, \dots, l, \\ 0 &= \Phi(x(t_f), p(t_f)).\end{aligned}$$

Vous donnerez les Ψ_i et Φ .

▷ **Exercice 3** (5 points). On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} x_1(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t) dt \\ \dot{x}(t) = (x_2(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = (0, 0). \end{cases}$$

Dans ce problème, $x(t) \in \mathbb{R}^2$ et $u(t) \in \mathbb{R}$. On cherche ici à minimiser un compromis entre la distance parcourue $x_1(t_f)$ et l'énergie dépensée (faisant intervenir la norme L^2 du contrôle). Soit (x, p, p^0, u) la BC-extrémale du problème ci-dessus (en supposant qu'elle est unique), c-à-d le 4-uplet solution du principe du maximum de Pontryagin. Donner $x(t)$, $p(t)$, p^0 et $u(t)$ en fonction de t_f qui est un paramètre fixé du problème.

▷ **Exercice 4** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_f} u^2(t) dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 0, \quad c(t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

avec $c(t_f, x_f) = x_f - t_f - 10$ et où $t_f > 0$ est libre. Calculer la solution (x, u, t_f) avec le vecteur adjoint p , le scalaire p^0 et le multiplicateur λ donnés par le principe du maximum de Pontryagin.