



Examen

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

- ▷ **Exercice 1** (5 points). Soient $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ indéfiniment différentiable, et $U \subset \mathbf{R}^m$; soient $\bar{u} \in \mathcal{L}_m^\infty([0, t_f])$ (où $t_f > 0$ est fixé) une fonction essentiellement bornée à valeurs dans U et soit \bar{x} une trajectoire associée :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}$$

On fixe $s \in]0, t_f[$, point de Lebesgue de \bar{u} , et une valeur $u \in U$; pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on définit u_ε la fonction égale partout à \bar{u} sauf sur $[s - \varepsilon, s]$ où l'on pose $u_\varepsilon(t) := u$. On note x_ε la solution de

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}$$

- 1.1.** En utilisant le fait que s est un point de Lebesgue, montrer qu'on a

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(s) - \bar{x}(s) &= \int_{s-\varepsilon}^s [f(x_\varepsilon(t), u) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))] dt, \\ &= \varepsilon A + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

avec A une quantité que l'on précisera.

- 1.2.** En déduire que

$$x_\varepsilon(s) - \bar{x}(s) = \varepsilon [f(\bar{x}(s), u) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))] + o(\varepsilon).$$

À l'aide des fonctions implicites, on définit au voisinage de $(t_f, \bar{x}(s))$ l'application indéfiniment différentiable $(T, x_s) \rightarrow x(T, x_s)$ qui donne la valeur en T de la solution de

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}(t)) \text{ (p.p.)}, \quad x(s) = x_s.$$

- 1.3.** Donner sans la justifier l'expression de $\partial x / \partial x_s(t, x_s)$.

- 1.4.** Montrer que

$$x_\varepsilon(t_f) - \bar{x}(t_f) = x(t_f, B) - x(t_f, \bar{x}(s))$$

avec B une quantité que l'on précisera.

1.5. En déduire finalement que

$$x_\varepsilon(t_f) - \bar{x}(t_f) = \varepsilon \frac{\partial x}{\partial x_s}(t_f, s) C + o(\varepsilon)$$

avec C une quantité que l'on précisera.

▷ **Exercice 2** (5 points). On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}, \quad |u(t)| \leq 1,$$

où q et u sont à valeurs dans \mathbf{R} , et sous les conditions aux limites $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$, $q(t_f) = 0$, et $\dot{q}(t_f)$ libre.

2.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ en posant $x = (q, \dot{q})$, avec f que l'on précisera.

2.2. Écrire le hamiltonien du problème.

2.3. Montrer à l'aide du principe du maximum que p_2 est de signe constant.

2.4. Montrer que p_2 n'est pas identiquement nulle.

2.5. En déduire qu'on a soit $u \equiv 1$, soit $u \equiv -1$ le long des trajectoires optimales.

2.6. Dessiner les trajectoires temps minimales dans le plan (x_1, x_2) .

▷ **Exercice 3** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Min } x^2(1) + \int_0^1 (tx(t) + u^2(t)) dt \\ & \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, 1] \text{ (p.p.)} \\ & x(0) = 1, \quad x(1) \text{ libre.} \end{aligned}$$

Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. On donnera explicitement l'expression de l'état, de la commande et de l'état adjoint en fonction du temps t .

▷ **Exercice 4** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Min } \int_0^2 (2x(t) - 3u(t) - u^2(t)) dt \\ & \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad u(t) \in [0, 2], \quad t \in [0, 2] \text{ (p.p.)} \\ & x(0) = 5, \quad x(2) \text{ libre.} \end{aligned}$$

Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. On attachera une attention particulière à l'étape de minimisation du hamiltonien.