



## Examen

**Durée 2H.** Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Rendre sur des copies séparées l'exercice 1 d'une part, les exercices 2 et 3 d'autre part. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

▷ **Exercice 1** (10 points). On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = \dot{q}(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}, \quad |u(t)| \leq 1,$$

où  $q$  et  $u$  sont à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , sous les conditions aux limites  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$  ( $q_0$  et  $\dot{q}_0$  fixés),  $q(t_f) = \dot{q}(t_f) = 0$ .

**1.1.** Mettre la dynamique sous la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  en posant  $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ , avec  $f$  une fonction que l'on précisera.

**1.2.** Montrer que le problème n'admet pas de solution si  $|\dot{q}_0| \geq 1$ .

**1.3.** Écrire le hamiltonien du problème.

**1.4.** Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint  $p = (p_1, p_2)$ .

**1.5.** En déduire que  $p_2$  est monotone.

**1.6.** Montrer que  $p_2$  ne peut pas être identiquement nulle.

**1.7.** En déduire que le contrôle vaut  $+1$  ou  $-1$ , avec au plus une commutation.

**1.8.** Donner l'expression de  $x_1$  et  $x_2$  le long d'un arc où le contrôle est  $u = 1$  et passant par  $(0, 0)$  en  $t = t_f$ .

**1.9.** En déduire l'équation en coordonnées  $(x_1, x_2)$  de l'arc correspondant, noté  $\Gamma_+$ , situé dans le demi-plan  $x_1 \geq 0$ .

**1.10.** Donner l'allure de la synthèse dans le plan  $(x_1, x_2)$ . [Dessiner approximativement les trajectoires temps minimales.]

▷ **Exercice 2** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Min } \int_0^{t_f} x^2(t) u^2(t) dt \\ & \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)} \\ & x(0) = 0, \quad x^2(t_f) - t_f^2 = 3 \end{aligned}$$

où  $t_f > 0$  est libre. Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum. On s'intéressera au rapport  $p/x$  où  $p$  désigne l'état adjoint associé à l'état  $x$ .

▷ **Exercice 3** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Min } x(t_f) \\ & \dot{x}(t) = -x(t)u(t) + u^2(t)/2, \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)} \\ & x(0) = x_0 \end{aligned}$$

où  $x_0 > 0$  et  $t_f > 0$  sont fixés. Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum. On montrera que  $p(t) > 0$ ,  $t \in [0, t_f]$ , où  $p$  désigne l'état adjoint associé à l'état  $x$ .