



Examen – Automatique

Session 1, lundi 15 novembre 2021

Documents autorisés : 1 pages A4
recto-verso manuscrite

Durée : 1h30

- ▷ **Exercice 1.** (9 points) Soit α une constante réelle fixée. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \alpha x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

1.1. Écrire ce système sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. On donnera les matrices A et B

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Pour quelles valeurs de α le système est-il contrôlable ?

La matrice de contrôlabilité est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 + \alpha \\ 1 & -1 + \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système est contrôlable si et seulement si $\text{rang}(C) = n = 3$ si et seulement si $\det(C) = -(1 - \alpha)^2 \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq 1$.

1.3. donner les points de fonctionnement de (S) lorsque $\alpha \neq 1$?

$$Ax + Bu = 0 \iff \begin{cases} u = x_1 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Par suite pour $\alpha \neq 1$, les points de fonctionnement sont $(x_e, u_e) = (x_1, x_1, 0, x_1)$.

1.4. On considère un contrôle par retour d'état autour d'un point de fonctionnement $(x_e, u_e) : u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Quels sont les dimensions de la matrice K .
2. Calculer $A + BK$.
3. Que doit vérifier la matrice $A + BK$ pour que l'on contrôle asymptotiquement le système autour du point de fonctionnement.
4. On considère maintenant le cas $\alpha = 1$ et on suppose que l'on a un point de fonctionnement (x_e, u_e) . Peut-on trouver des coefficients afin que le retour d'état stabilise asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement ?

1. $K \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$

2.

$$A + BK = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ k_1 & (k_2 - 1) & k_3 + \alpha \\ k_1 - 1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

3. Les valeurs propres de $A + BK$ doivent être à partie réelle négative. En effet le système par retour d'état s'écrit $\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u_e + K(x(t) - x_e)) = g(x(t))$ et x_e est un point d'équilibre de ce système. Ensuite si on pose $y(t) = x(t) - x_e$ alors le système s'écrit en y $\dot{y}(t) = (A + BK)y(t)$ et dire que $x(t)$ converge vers x_e est équivalent à dire que $y(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Pour $\alpha = 1$ on a $\text{rang}(A + BK) = 2$ (ligne 1 + ligne 2 = ligne 3). Donc 0 est une valeur propre de $A + BK$. On ne peut donc pas stabiliser asymptotiquement le système par retour d'état.

▷ **Exercice 2.** (7 points)

On considère le modèle de pêche suivant

$$(S) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) - ax(t)u(t) \end{aligned} \right.$$

où r, b et a sont des constantes strictement positives, $x(t)$ représente la biomasse totale et $u(t)$ le taux de pêche.

2.1. Donner la fonction f permettant d'écrire l'équation différentielle sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Le système est-il linéaire. Si oui, on donnera les matrices A et B .

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = rx(1 - x/b) - axu. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système non linéaire.

2.2. Donner les points de fonctionnement (x_e, u_e) de ce système.

$$f(x, u) = 0 \iff rx(1 - x/b) - axu = 0.$$

— Cas 1 $x = 0$ et u est quelconque.

— Cas 2 $x \neq 0$ et $u = (r/a)(1 - x/b)$.

2.3. On considère un contrôle par retour d'état autour d'un point de fonctionnement $(x_e, u_e) : u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Quels sont les dimensions de la matrice K .
2. Donner la condition sur K pour que l'on contrôle asymptotiquement le système autour du point de fonctionnement.
3. Avec une valeur de K qui vérifie la condition ci-dessus, et partant d'un point très éloigné du point de fonctionnement, que peut-on dire de la limite de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

1. $K \in \mathbf{R}$.

▷ **Exercice 3.** (4 points) Soit $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$. On rappelle les schémas d'Euler explicite et implicite à pas constant $h = (t_f - t_0)/N$ pour résoudre un problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Euler explicite

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i).$$

Euler implicite

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}).$$

On considère le système suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{q}(t) = p(t) \\ \dot{p}(t) = -q(t) \\ q(0) = q_0 \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

On note $x = (q, p)$.

3.1. Écrire ce que donne le schéma d'Euler explicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = (1 + h^2)\|x_0\|^2$.

3.2. Écrire ce que donne le schéma d'Euler implicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = \frac{1}{(1+h^2)}\|x_0\|^2$.

3.3. Quels commentaires pouvez-vous faire ?