



## Solution examen – Automatique

### Session 1

### Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso

#### ▷ Exercice 1.

##### 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

##### 1.2. La matrice de contrôlabilité est

$$C = (BAB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son rang est égal à 2, la dimension du système ( $S$ ). Par suite (critère de Kalman) le système est contrôlable.

##### 1.3. On pose

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) = Kx(t).$$

Le système ( $S$ ) devient alors  $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$ . Il est asymptotiquement stable avec comme pôles les valeurs  $-1$  et  $-2$  si et seulement si les valeurs propres de  $A + BK$  sont  $-1$  et  $-2$ , soit

$$\det(A + BK - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 + k_1 & 1 + k_2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Soit  $\lambda^2 - (2 + k_2)\lambda + (2 + k_1 + k_2) = \lambda + 3\lambda + 2$ . Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} k_2 + 2 = -3 \\ 2 + k_1 + k_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} k_2 = -5 \\ k_1 = 5 \end{cases}$$

##### 1.4. Si $u(t) = kx_2(t)$ alors le système s'écrit

$$\dot{x}(t) = Cx(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 + k \end{pmatrix} x(t).$$

Pour que le système soit asymptotiquement stable il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{cases} \det(C) = 2 + k > 0 \\ \text{trace}(C) = 2 + k < 0 \end{cases}$$

Ce qui est impossible. Donc le système obtenu n'est jamais asymptotiquement stable. Si le système est stable alors on doit avoir

$$\begin{cases} \det(C) = 2 + k \geq 0 \\ \text{trace}(C) = 2 + k \leq 0 \end{cases}$$

et donc  $k = 2$ . Dans ce cas

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La seule valeur propre de cette matrice est 0. Mais ici le rang du sous-espace propre associé est de 1. Par conséquent, il n'y a pas de stabilité.

▷ **Exercice 2.**

**2.1.**

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, v) &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{J_2 - J_3}{J_1} x_2 x_3 + \frac{v_1}{J_1} \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} x_3 x_1 + \frac{v_2}{J_2} \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} x_1 x_2 + \frac{v_3}{J_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**2.2.** Posons  $g(\omega(t)) = f(\omega(t), K\omega(t))$ , alors

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{J_2 - J_3}{J_1} x_2 x_3 + k_1 \frac{x_1}{J_1} \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} x_3 x_1 + k_2 \frac{x_2}{J_2} \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} x_1 x_2 + k_3 \frac{x_3}{J_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{J_1} & \frac{J_2 - J_3}{J_1} x_3 & \frac{J_2 - J_3}{J_1} x_2 \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} x_3 & \frac{k_2}{J_2} & \frac{J_3 - J_1}{J_2} x_1 \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} x_2 & \frac{J_1 - J_2}{J_3} x_1 & \frac{k_3}{J_3} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$J_g(\omega_e) = J_g(0) = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{J_3} \end{pmatrix}.$$

Par suite le système est stable si cette matrice admet des valeurs propres à partie réelle strictement négative, ce qui donne ici  $k_1 < 0, k_2 < 0$  et  $k_3 < 0$ .

2.3. 1.

$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{J_2 - J_3}{J_1} x_2 x_3 \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} x_3 x_1 \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

2.

$$J_g(\omega_e) = J_g(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Comme le système est non linéaire, on ne peut rien conclure quant à la stabilité ou la stabilité asymptotique.

2.4. 1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\omega(t)) &= J_1 \omega_1(t) \dot{\omega}_1(t) + J_2 \omega_2(t) \dot{\omega}_2(t) + J_3 \omega_3(t) \dot{\omega}_3(t) \\ &= (J_2 - J_3) \omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t) + (J_3 - J_1) \omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t) \\ &\quad + (J_1 - J_2) \omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc le long de toute trajectoire  $V$  est constante.

2. Soit  $c > 0$  fixé, posons  $E_c = \{\omega \in \mathbf{R}^3, V(\omega) < c\}$ , alors  $J_3 \|\omega\|^2 \leq V(\omega)$ . Donc si on pose  $\varepsilon = \sqrt{\frac{c}{J_3}}$ , on a  $V \subset B(0, \varepsilon)$ . Si maintenant on considère  $\omega \in B(0, \eta)$ , alors  $V(\omega) \leq J_1 \|\omega\|^2 < J_1 \eta^2$ . Par suite si on pose  $c = \eta^2 J_1$ , on a  $B(0, \eta) \subset E_c$ . Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  fixé. Posons  $\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{J_3}{J_1}}$ , alors on a  $B(0, \eta) \subset E_c \subset B(0, \varepsilon)$  (avec  $c = J_3 \varepsilon^2$ ). Par suite pour tout point initial  $\omega_0$  dans  $B(0, \eta)$ ,  $V(\omega(t)) = V(\omega_0)$  pour tout  $t$ , donc  $\omega(t) \in B(0, \eta) \subset E_c \subset B(0, \varepsilon)$ . D'où la stabilité.

par contre le système n'est pas asymptotiquement stable car pour tout  $\omega_0 \in B(0, \eta)$ ,  $\omega_0 \neq 0$ ,  $V(\omega(t)) = V(\omega_0) = c > 0$ . Or  $V$  est continue, donc si  $\omega(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , alors  $V(\omega(t)) \rightarrow V(0) = 0$ ; ce qui est impossible.

▷ **Exercice 3.**

**3.1.** Ici on a

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(t, x) \longmapsto x.$$

Par suite le schéma d'Euler explicite donne

$$x_1 = x_0 + hf(0, x_0) = (1 + h)x_0.$$

et le schéma de Runge donne

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_0, x_0) = x_0 \\k_2 &= f(t_0 + h/2, x_0 + (h/2)k_1) = x_0 + (h/2)x_0 \\x_1 &= x_0 + hk_1 = (1 + h + h^2/2)x_0.\end{aligned}$$

**3.2.** On sait que la solution du système est  $e^t x_0$  donc  $x(t_1) = e^h x_0$ . Par suite, pour le schéma d'Euler explicite on a

$$|x(t_1) - x_1| = (h^2/2 + \dots h^k/k! + \dots)x_0 = O(h^2).$$

Le schéma est donc d'ordre 1. Quant-au schéma de Runge on a

$$|x(t_1) - x_1| = (h^3/3! + \dots h^k/k! + \dots)x_0 = O(h^3).$$

Et ce schéma est d'ordre 2.

**3.3.** Considérons un schéma de Runge-Katta explicite à  $s$  étages. On a

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_0, x_0) = x_0 \\k_2 &= f(t_0 + c_2 h, x_0 + h a_{21} k_1) = x_0 + h a_{21} k_1 \\&\vdots \\k_s &= f(t_0 + c_s h, x_0 + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i) = x_0 + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i \\x_1 &= x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que les  $k_i$  sont des polynômes de degré  $i - 1$  en  $h$ . L'assertion est vraie pour  $i = 1$ .

Supposons la vraie pour  $i$  et montrons là pour  $i + 1$ . On a

$$k_{i+1} = f(t_0 + c_{i+1} h, x_0 + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j) = x_0 + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j$$

Par hypothèse de récurrence les  $k_j$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $j - 1$ . On en déduit immédiatement le résultat. Par suite  $x_1$  est un polynôme de degré  $s$  en  $h$  et on a au mieux

$$|x(t_1) - x_1| = (h^{s+1}/2 + \dots h^k/k! + \dots)x_0 = O(h^{s+1}).$$

et l'ordre ne peut être supérieur à  $s$ .