

Automatique - Partie Système commandé

Chapitre 1 : Introduction à la théorie des systèmes, définitions

O. Cots et J. Gergaud



Département Sciences du Numérique

20 septembre 2021

Clepsydre (Ctésibios d'Alexandrie en -270)

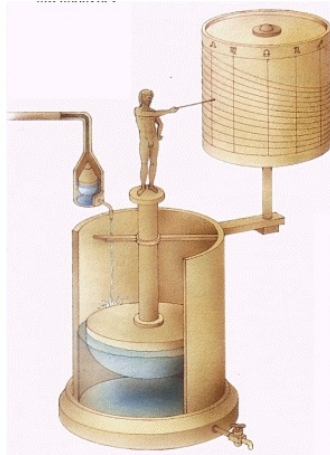


Figure: *Clepsydre (Ctésibios d'Alexandrie en -270).*

Années 800 – 1200 : ingénieurs Arabes (Al-Jazari, ...)

- Régulateur à flotteur pour des horloges à eau ;
- La pompe aspirante à double effet automatique ;
- ...
- Livre de la connaissance des procédés mécaniques vers 1205.
Des copies se trouvent
 - à Topkapi à Istanbul
 - au Musée des Beaux-Arts à Boston
 - au musée du Louvre à Paris
 - à la Bibliothèque d'Oxford

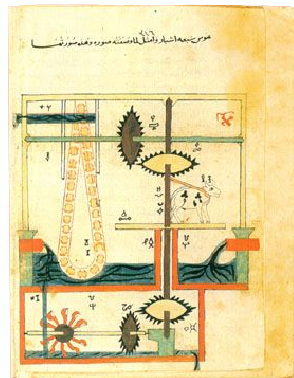


Figure: Manuscrit d'Al-Jazari, vers 1205.

Années 1600 – 1800 : pré-révolution industrielle

- Régulation de la température ;
- Moulin à vent ;
- Soupape de sécurité de Papin ;
- Régulateur à boules de James Watt pour réguler la vitesse de rotation d'une machine à vapeur.

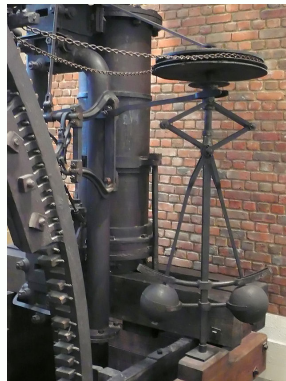


Figure: *Boulton & Watt engine of 1788.*

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steam_engine_in_action.gif

1800 – 1960 : formalisme mathématique et début de l'informatique

- Équations différentielles ordinaires
- Équations aux dérivées partielles
- Analyse stochastique (Kolmogorov, Wiener, ...), théorie des processus stochastiques
- Stabilité
- Contre réaction (feedback)
- ...

1960 – → : période moderne, développement de l'industrie aéronautique et spatiale, développement des mathématiques et de l'informatique

- Théorie de la commande non linéaire.
- Théorie de la commande optimale (Bellman, Kalman, Pontryagin, ...).
- Contrôlabilité, observabilité.
- Commande robuste
- ...

Pendule simple contrôlé, version 1

Si $\ddot{\alpha}(t)$ désigne la dérivée seconde de l'angle α par rapport au temps t , l'évolution du mouvement est

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t),$$

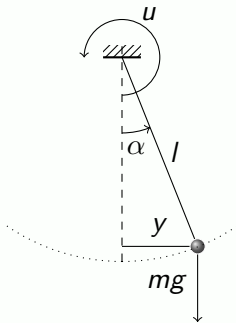


Figure: *Pendule simple contrôlé.*

Pendule simple contrôlé, version 1, équation d'état

On pose $x(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(z_1) + \frac{v}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Équation d'état et second membre

- Ceci est une **équation** dont l'inconnue est la fonction $x(\cdot)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Pour une commande $u(\cdot)$ et un point initial x_0 donnés, on cherche une fonction du temps t que l'on peut noter $x(\cdot)$, ou $\varphi(\cdot)$ par exemple, qui vérifie $\varphi(0) = x_0$ et à tout instant t : $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), u(t))$.

- Le second membre f de l'équation est une **fonction** de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ dans \mathbf{R}^n , où n est la dimension de $x(t)$ et m est la dimension de $u(t)$.

On peut en pratique avoir accès à différentes variables de sortie (mesurées) :

- $y(t) = \alpha(t) = x_1(t)$;
- $y(t) = x(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$;
- $y(t) = l \sin(\alpha(t))$ = la distance entre la masse et l'axe des ordonnées.

On écrira ces variables de sortie sous la forme $y(t) = g(x(t), u(t))$.

Pendule simple contrôlé, version 2

En pratique il y a des frottements. Une meilleure modélisation du système est donc

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + \frac{k}{m}\dot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t).$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

L'application f s'écrit alors

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{u}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

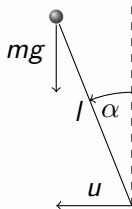


Figure: *Pendule inversé contrôlé, version 3.*

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{u(t)}{l^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

Robot Lego segway

Nous décrivons ici le modèle du Robot Lego qui sera utilisé en TP.

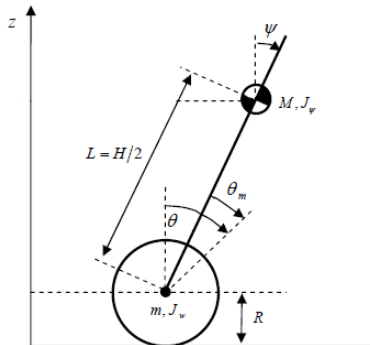


Figure: Robot Lego segway.

Voici d'autres exemples plus complexes :

- pilote automatique d'un avion ;
- contrôle des gouvernes d'un avion ;
- contrôle de freinage ABS ;
- contrôle de vol d'un drone ;
- contrôle de vol d'un [flyboard](#) ;
- pompe à insuline.
- ...

Boucle ouverte et boucle fermée



Figure: Schéma fonctionnel simple d'un système en *boucle ouverte*.

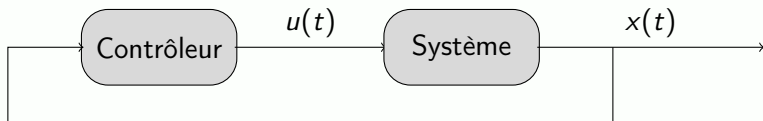


Figure: Schéma fonctionnel simple d'un système en *boucle fermée*.

Schéma fonctionnel général

$d(t)$ est une perturbation extérieure du système

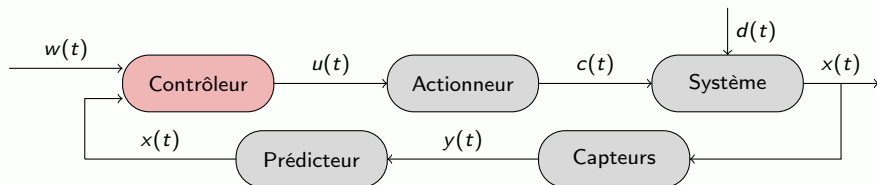


Figure: Schéma fonctionnel complet d'un système en boucle fermée.

- État $x(t) \in \mathbf{R}^n$
- Commande ou contrôle ou variable d'entrée $u(t) \in \mathbf{R}^m$
- Variable de sortie ou mesurée $y(t) \in \mathbf{R}^p$
- Consigne $w(t) \in \mathbf{R}$
- Système = Équation d'état : $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$
- Équation de sortie $y(t) = g(t, x(t), u(t))$.

- Étude mathématique du système contrôlé
 - Étude du système non contrôlé : point d'équilibre d'une edo (rappels pour certains)
 - Contrôlabilité, observabilité
 - Calcul du contrôle
- Simulation numérique
 - Matlab
 - Simulink → code C
- Capteurs
- Code embarqué sur le robot
- Gestion du temps réel

Définition (Point de fonctionnement, point d'équilibre)

On appelle point de fonctionnement d'un système un point (x_e, u_e) tel que $f(x_e, u_e) = 0$. On dit que x_e est un point d'équilibre (pour le contrôle u_e).

Exemple

Pour le pendule simple on a pour $u_e = 0$ deux points d'équilibre : $x_0 = (0, 0)$ et $x_e = (\pi, 0)$.

Une fois le modèle bien défini, plusieurs questions se posent :

- Sur l'analyse et le comportement dynamique du système
 - **Commandabilité ou contrôlabilité du système.** Existe-t-il un contrôle $u(\cdot)$ qui amène le système d'un état initial donné x_0 à un état final x_f en un temps $t = t_f$ fixé ?
 - **Observabilité.** Connaissant la variable de sortie $y(t)$ et le contrôle $u(t)$ pour tout $t \in [0, \tau_u[$, peut-on déterminer l'état $x(t)$ pour tout $t \in [0, \tau_u[$, ou de manière équivalente $x(0)$.

- Sur la synthèse des lois de contrôle
 - **Planification de trajectoires.** Si le système est contrôlable, comment trouver un contrôle qui amène l'état de x_0 à x_f en un temps t_f fixé ?
 - **Stabilisation.** Comment construire un contrôle qui stabilise asymptotiquement le système autour d'un point d'équilibre x_e , c'est-à-dire tel que, pour toute condition initiale, on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e?$$

- **Synthèse d'observateurs.** En cas de réponse positive à la question de l'observabilité, comment déterminer l'état $x(\cdot)$ à partir de la connaissance de $y(\cdot)$ et de $u(\cdot)$?
- **Contrôle optimal.** Trouver le meilleur contrôle qui amène l'état de x_0 à x_f en un temps t_f fixé ou libre.

- Cours 1 :
 - Introduction générale, systèmes embarqués et informatique (Marc Pantel)
 - Systèmes commandés (Joseph Gergaud + Olivier Cots)
- Cours 2 et 3 : Systèmes commandés (Joseph Gergaud + Olivier Cots)
- Cours 4 : Introduction Simulink (Neeraj Singh)



Joseph Gergaud



Olivier Cots



Marc Pantel



Neeraj Singh

Plan du cours

- TD1–TD4 : Systèmes commandés (7 groupes, JG + OC + Sadok Jerad + Boris Wembe)



Joseph Gergaud



Olivier Cots



Sadok Jerad



Boris Wembe

- TP1–TP5 (travail en binôme par groupe de TD) : Simulink, simulation pendule inversé contrôlé, simulation robot, Calcul de pôles, génération de code pour le Robot, test sur le robot (7 groupes de TP-TD, OC, Jérôme Ermont, JG, MP, NS, BW)



O. Cots



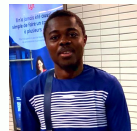
J. Ermont



J. Gergaud



M. Pantel



N. Singh

B. Wembe

- Traitement du signal (0,5)
- Automatique : Examen écrit (0,2) et TP notés (0,2)
- Langage C : QCM de 30' (0,1)

- Introduction
- Chapitre 1 : Introduction à la théorie des systèmes, définitions
 - Introduction historique
 - Théorie du contrôle : Exemples simples, Robot, ...
 - Définitions, objectifs
- Chapitre 2 : Stabilité des systèmes dynamiques
 - Introduction
 - Cas des équations différentielles linéaires homogènes et autonomes
 - Équations différentielles linéaires avec second membre
 - Équation différentielle ordinaire non linéaire
 - Stabilité
 - Intégration numérique : Runge-Kutta explicite (Euler, ...)
- Chapitre 3 : Commande des systèmes
 - Cas linéaires : contrôlabilité, observabilité, stabilisation par retour d'état
 - Cas non-linéaire : stabilisation par retour d'état