



Solution de l'examen d'automatique

Session 1, mardi 11 décembre 2018

▷ **Exercice 1.**

1.1. On voit sur la figure 1 que α et $\dot{\alpha}$ tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$; ce qui n'est pas le cas de la figure 2. Donc seul le premier cas peut être stable asymptotiquement.

1.2. Le système du pendule simple inversé n'est pas linéaire à cause de la fonction sinus. Pas suite, la stabilité asymptotique n'est valable que pour un point "proche" du point de fonctionnement. C'est visiblement le cas pour $x_0 = (\pi/20, 0)$, mais pas pour $x_0 = (\pi/10, 0)$.

▷ **Exercice 2.**

2.1.

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2. Non car f n'est pas linéaire. On ne peut pas écrire $f(x) = Ax$.

2.3. On cherche les solutions de $f(x) = 0$. Si $x_1 = 0$ alors $x_2 = 0$ et si $x_1 \neq 0$ alors $x_2 = x_1^2$ et la deuxième équation donne $x_1^3 - x_1^6 = x_1^3(1 - x_1^3) = 0$; par suite $x_1 = 1$.

Les points d'équilibres du système sont donc $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

2.4. La matrice jacobienne de f en x est

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - 3x_1^2 & x_1 \\ x_2 & x_1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

— Pour le point d'équilibre $(0, 0)$ on a

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui a comme unique valeur propre 0 ; ne peut donc pas conclure car le système est non linéaire.

— Pour le point d'équilibre $(1, 1)$ on a

$$J_f(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ici $\det(J_f(1, 1)) = 3 > 0$ et $\text{trace}(J_f(1, 1)) = -4 < 0$ donc les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative. Le système est donc asymptotiquement stable en ce point d'équilibre.

▷ **Exercice 3.**

3.1.

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, u) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{ax_3 - kx_1}{m} \\ -\frac{x_3}{x_1} \left(x_2 - \frac{u}{a}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.2. Les points de fonctionnement sont $(x_{e1}, 0, \frac{kx_{e1}}{a}, 0)$.

3.3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{a}{m} \\ \frac{x_3}{x_1^2} \left(x_2 - \frac{u}{a}\right) & -\frac{x_3}{x_1} & -\frac{(x_2 - u/a)}{x_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_3}{ax_1} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{a}{m} \\ 0 & -\frac{k}{a} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{a^2} \end{pmatrix}.$$

3.4. 1. K est une matrice de dimension $(1, 3)$.

2. Posons $g(x) = f(x, u_e + K(x - x_e))$. Le problème revient donc à trouver K qui stabilise asymptotiquement le système $\dot{x}(t) = g(x(t))$ avec des valeurs de $-1, -2$ et -3 pour les pôles. Or

$$J_g(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{a}{m} \\ \frac{kk_1}{a^2} & -\frac{k}{a} + \frac{kk_2}{a^2} & \frac{kk_3}{a^2} \end{pmatrix}$$

et

$$\det(J_g(x_e) - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{kk_3}{a^2}\lambda^2 + \left(-2\frac{k}{a} + \frac{kk_2}{ma}\right)\lambda + \frac{k^2k_3 + akk_1}{a^2m}.$$

Or $-(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda - 6$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{kk_3}{a^2} &= -6 \\ -2\frac{k}{m} + \frac{kk_2}{ma} &= -11 \\ \frac{k^2k_3 + akk_1}{a^2m} &= -6\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}k_3 &= -\frac{6a^2}{k} \\ k_2 &= 2a - \frac{11am}{k} \\ k_1 &= -\frac{6am}{k} + 6a\end{aligned}$$