



Solution de l'examen d'automatique

Session 1, mardi 10 décembre 2019

▷ **Exercice 1.**

1.1.

$$f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, u) \longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 + u \\ -x_1 + u \end{pmatrix}$$

1.2. Oui le système est linéaire. On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. La matrice de contrôlabilité est

$$C = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1 qui est strictement inférieur à $n = 3$. Par suite le système n'est pas contrôlable.

▷ **Exercice 2.**

2.1.

$$f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, u) \longmapsto f(x, u) \begin{pmatrix} \frac{1}{C}(-h(x_1) + x_2) \\ \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{pmatrix}.$$

2.2. h doit être l'équation d'une droite : $h(x_1) = ax_1 + b$.

2.3. On cherche les solution de $f(x) = 0$, c'est-à-dire du système

$$\begin{cases} -h(x_1) + x_2 = 0 \\ -x_1 - Rx_2 + u = 0. \end{cases}$$

2.4. Le système précédent est équivalent au système

$$\begin{cases} x_2 = h(x_1) \\ x_2 = \frac{1}{R}(-x_1 + u). \end{cases}$$

Pour $u = 1.2V$ les points de fonctionnement sont donc les 3 points d'intersection de la courbe $x_2 = h(x_1)$ avec la droite $x_2 = \frac{1}{R}(-x_1 + u)$. les solutions sont : $(0.06, 0.758, 1, 2)$, $(0.2854, 0.6098, 1.2)$ et $(0.8844, 0.2104, 1.2)$.

2.5. Si u varie la droite d'équation $x_2 = \frac{1}{R}(-x_1 + u)$ varie sur le graphique de façon parallèle. Nous aurons donc suivant les cas 1, 2 ou 3 points de fonctionnement.

- 2.6.**
1. Dans un voisinage du point Q_1 , toutes les trajectoires vont vers ce point. Le point Q_1 est donc asymptotiquement stable.
 2. Idem pour le point Q_3 .
 3. Dans tout voisinage du point Q_2 , il existe un point tel que la trajectoire issue de ce point s'éloigne du point Q_3 . Le point Q_3 est instable.

▷ **Exercice 3.**

3.1.

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, u) &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 + u \\ -x_1 + u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.2. Le système est non linéaire à cause du terme $x_1 x_3$ dans la deuxième composante de la fonction f .

3.3. (x, u) est un point de fonctionnement si et seulement si il vérifie

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 + u = 0 \\ -x_1 + u = 0. \end{cases}$$

soit $(x, u) = (x_1, x_1, 0, x_1)$ ou $(x, u) = (-1, x_2, x_2 + 1, -1)$.

3.4.

1. K est une matrice de dimension $(1, 3)$.

2.

$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 + u_e + k_1(x_1 - x_{e1}) + k_2(x_2 - x_{e2}) + k_3(x_3 - x_{e3}) \\ -x_1 + u_e + k_1(x_1 - x_{e1}) + k_2(x_2 - x_{e2}) + k_3(x_3 - x_{e3}) \end{pmatrix}$$

Donc

$$J_g(x_e) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -x_{e3} + k_1 & -1 + k_2 & -x_{e1} + k_3 \\ -1 + k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

3. Il faut que la matrice $J_g(x_e)$ ait ses valeurs propres à partie réelle strictement négatives.

4.

$$J_g(-1, -1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ k_1 & -1 + k_2 & 1 + k_3 \\ -1 + k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

Par suite 0 est valeur propre car la troisième ligne est la somme des deux premières lignes. On ne peut donc trouver une matrice K permettant de stabiliser asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement par cette méthode.