



TD, Automatique Intégration numérique

O. Cots, J. Gergaud & B. Wembe

1 Introduction

On désire calculer la solution sur un intervalle $[t_0, t_f]$ du problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $f : \Omega \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, Ω ouvert et $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Définition 1.1 (Définition classique). On suppose f continue. On appelle solution classique de (IVP) tout couple (I, x) , I intervalle ouvert de \mathbf{R} , contenant t_0 et $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ dérivable en tout point et vérifiant :

1. $(t, x(t)) \in \Omega$, $\forall t \in I$;
2. $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $\forall t \in I$;
3. $x(t_0) = x_0$.

Une telle solution est aussi appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

Remarque 1.2. Si f est continue (resp. C^k) et (I, x) est une solution, alors x est C^1 (resp. C^{k+1}).

Les équations différentielles pour lesquelles on peut calculer une solution analytique (en pratique avec des fonctions usuelles (\sin, \log, \dots)) sont rares. La seule solution est alors de calculer une approximation de la solution via un algorithme. On trouvera dans [2] une bonne introduction sur ces méthodes numériques et dans [3] et [4] un panorama assez complet des différentes méthodes existantes.

2 Exemple

Soit

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + \sin t \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_1(0) = -9/25 \\ x_2(0) = -4/25. \end{cases}$$

La solution est

$$\begin{aligned}x_1(t) &= (-1/25)(13 \sin t + 9 \cos t) \\x_2(t) &= (-1/25)(3 \sin t + 4 \cos t).\end{aligned}$$

Sur cet exemple on constate que si on utilise les valeurs des paramètres par défaut dans les codes d'intégration numérique on peut très rapidement obtenir des résultats faux. Par exemple sur la Fig. 1, la solution calculée pour les valeurs par défaut des paramètres `RelTol` et `AbsTol` de ODE45 n'est pas du tout périodique.

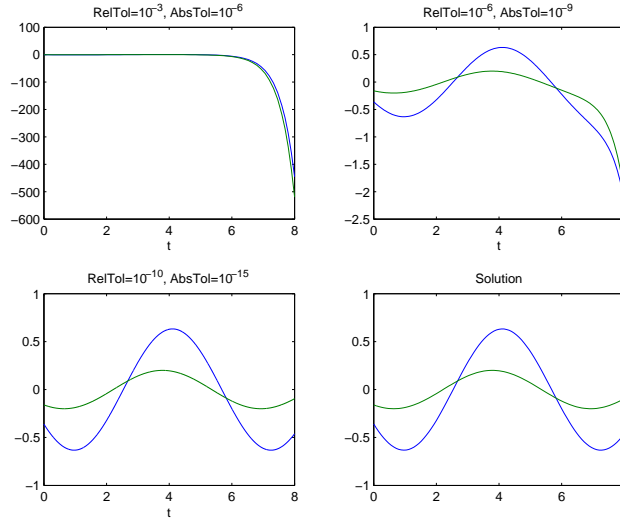


FIGURE 1 – Solutions calculées avec ODE45, `RelTol`= 10^{-3} et `AbsTol`= 10^{-6} , `RelTol`= 10^{-6} et `AbsTol`= 10^{-9} , `RelTol`= 10^{-10} et `AbsTol`= 10^{-15} et solution exacte.

3 Intégration numérique par les méthodes de Runge-Kutta explicites

On considère une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ dans I . On note $h_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, N-1$, les pas en temps (non nécessairement égaux), et $h_{\max} = \max_i(h_i)$. Nous allons calculer successivement les valeurs approchées x_1, \dots, x_N de $x(t_1), \dots, x(t_N)$.

Remarque 3.1. Pour simplifier les notations, nous n'écrirons dans la suite que le premier pas

$$x_1 = x_0 + h\Phi(t_0, x_0, h).$$

Définition 3.2 (Schéma d'Euler (1768)). On appelle méthode d'Euler explicite le schéma

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0). \quad (1)$$

Remarque 3.3. Le schéma d'Euler explicite est tout simplement une approximation de l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))ds$ par $hf(t_0, x_0)$.

Exemple 3.4.

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = t^2 + x^2(t) \\ x(-1.5) = -1.4 \end{cases}$$

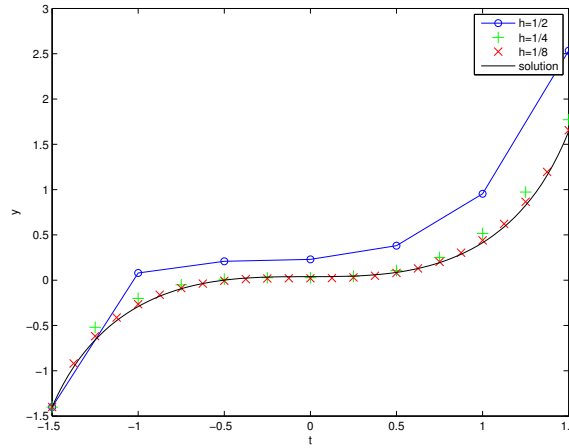


FIGURE 2 – Schéma d'Euler, $h = 1/2, 1/4, 1/8$.

L'idée évidente pour améliorer la précision numérique est d'approcher cette intégrale par une formule de quadrature ayant un ordre plus élevé. Si on exploite, pour améliorer l'approximation de l'intégrale, le point milieu, nous obtenons

$$x(t_1) \approx x_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x(t_0 + \frac{h}{2})\right).$$

Mais on ne connaît pas la valeur de $x(t_0 + \frac{h}{2})$, d'où l'idée d'approximer cette quantité par un pas d'Euler : $x(t_0 + h/2) \approx x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0)$. Nous obtenons ainsi le schéma de Runge.

Définition 3.5 (Schéma de Runge (1895)).

$$x_1 = x_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0)\right). \quad (2)$$

4 Méthodes de Runge-Kutta explicite

4.1 Définition

Définition 4.1 (Méthode de Runge-Kutta explicite). On appelle méthode de Runge-Kutta explicite à s étages, la méthode définie par le schéma

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, x_0) \\ k_2 &= f(t_0 + c_2 h, x_0 + h a_{21} k_1) \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_0 + c_s h, x_0 + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i) \\ x_1 &= x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{aligned} \quad (3)$$

où les coefficients c_i, a_{ij} et b_i sont des constantes qui définissent précisément le schéma. On supposera toujours dans la suite que $c_1 = 0$ et $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ pour $i = 2, \dots, s$.

On représente en pratique ce schéma par le tableau de Butcher¹[1], cf. la figure 3 et la table 1.

c_1					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss-1}	
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s



TABLE 1 – *Tableau de Butcher.* FIGURE 3 – *Professeur John Butcher.*

Exemple 4.2. On considère par exemple les schémas

4.2 Ordre

Rappelons tout d'abord les notations de Landau.

Définition 4.3 (Notations de Landau). 1. L'équation (4) ci-après signifie qu'il existe un voisinage U de 0 et il existe une constante C telle que pour tout $h \in U$ on a $\|e(h)\| \leq C|h|^p$.

$$e(h) = O(h^p). \quad (4)$$

1. https://en.wikipedia.org/wiki/John.C._Butcher

<table> <tr><td>0</td><td> </td><td></td></tr> <tr><td></td><td> </td><td>1</td></tr> </table>	0					1	<table> <tr><td>0</td><td> </td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td> </td><td>1/2</td></tr> <tr><td></td><td> </td><td>0 1</td></tr> </table>	0		1/2	1/2		1/2			0 1	<table> <tr><td>0</td><td> </td><td>1/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>1/3</td><td> </td><td>0</td><td>2/3</td></tr> <tr><td></td><td> </td><td>1/4</td><td>0 3/4</td></tr> </table>	0		1/3	1/3	1/3		0	2/3			1/4	0 3/4			
0																																
		1																														
0		1/2																														
1/2		1/2																														
		0 1																														
0		1/3	1/3																													
1/3		0	2/3																													
		1/4	0 3/4																													
Euler (ordre 1)	Runge (ordre 2)	Heun (ordre3)																														
<table> <tr><td>0</td><td> </td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td> </td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td> </td><td>0 1/2</td></tr> <tr><td>1</td><td> </td><td>0 0 1</td></tr> <tr><td></td><td> </td><td>1/6 2/6 2/6 1/6</td></tr> </table>	0		1/2	1/2		1/2	1/2		0 1/2	1		0 0 1			1/6 2/6 2/6 1/6	<table> <tr><td>0</td><td> </td><td>1/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>1/3</td><td> </td><td>-1/3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2/3</td><td> </td><td>1</td><td>-1 1</td></tr> <tr><td>1</td><td> </td><td>1/8 3/8 3/8 1/8</td></tr> </table>	0		1/3	1/3	1/3		-1/3	1	2/3		1	-1 1	1		1/8 3/8 3/8 1/8	
0		1/2																														
1/2		1/2																														
1/2		0 1/2																														
1		0 0 1																														
		1/6 2/6 2/6 1/6																														
0		1/3	1/3																													
1/3		-1/3	1																													
2/3		1	-1 1																													
1		1/8 3/8 3/8 1/8																														
La méthode RK4 (ordre 4)	RK4, règle 3/8 (ordre 4)																															

TABLE 2 – Schémas de Runge-Kutta classiques.

2. L'équation (5) ci-après signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon(h)$ à valeurs réelles telle que $\|e(h)\| = |h|^p \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

$$e(h) = o(h^p). \quad (5)$$

Définition 4.4 (Ordre). On dit qu'une méthode à un pas est d'ordre $p \geq 1$ si, pour tout problème de Cauchy avec f suffisamment dérivable, l'erreur sur un pas, appelée erreur locale satisfait

$$e(h) = x_1 - x(t_1, t_0, x_0) = O(h^{p+1}), \quad (6)$$

où x_1 est la valeur calculée par le schéma et $x(t_1, t_0, x_0)$ est la valeur exacte du problème de Cauchy avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$.

Remarque 4.5. Attention, un schéma d'ordre p a une erreur locale en $O(h^{p+1})$. On démontre que c'est l'erreur globale $x_N - x(t_f, t_0, x_0)$ qui est en $O(h_{max}^p)$.

Exemple 4.6. Le schéma d'Euler explicite est d'ordre $p = 1$ car par définition de la dérivée on a

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0 + h) = x_0 + h\dot{x}(t_0) + O(h^2) = x_0 + hf(t_0, x_0) + O(h^2) \\ &= x_1 + O(h^2). \end{aligned}$$

4.3 Exercices

- ▷ **Exercice 1.** Écrire les schémas de Runge-Kutta correspondant aux tableaux de la table 2 (pour les tableaux de Butcher à 1, 2 et 3 étages)

▷ **Exercice 2.** On considère le schéma de Runge-Kutta explicite à 2 étages

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \quad \text{avec} \quad c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij},$$

Démontrer que les relations que doivent vérifier les coefficients pour avoir un schéma d'ordre 2 sont

$$b_1 + b_2 = 1 \quad \text{et} \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{2}.$$

▷ **Exercice 3.**

▷ **Exercice 4.** On considère l'équation différentielle suivante

$$\dot{q}(t) = p(t) \tag{7}$$

$$\dot{p}(t) = -q(t). \tag{8}$$

On note $x = (q, p)$.

4.1. Montrer que le long de toute trajectoire on a

$$p^2(t) + q^2(t)$$

qui est constant.

4.2. Écrire le schéma d'Euler explicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = (1 + h^2)\|x_0\|^2$.

4.3. On appelle le schéma d'Euler implicite le schéma $x_1 = x_0 + hf(t_1, x_1)$. Écrire le schéma d'Euler implicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = \frac{1}{(1+h^2)}\|x_0\|^2$.

5 Méthodes de Runge-Kutta implicite

5.1 Définition

Définition 5.1. Méthode de Runge-Kutta implicite On appelle méthode de Runge-Kutta implicite à s étages, la méthode définie par le schéma

$$\begin{cases} k_i = f(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) & \text{pour } i = 1, \dots, s \\ x_1 = x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{cases} \tag{9}$$

où les coefficients c_i, a_{ij} et b_i sont des constantes qui définissent précisément le schéma. On supposera toujours dans la suite que $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$ pour $i = 1, \dots, s$.

On représente en pratique ce schéma par le tableau de Butcher, cf. la table 3.

c_1	a_{11}	\dots	a_{1s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
c_s	a_{s1}	\dots	a_{ss}
	b_1	\dots	b_s

TABLE 3 – *Tableau de Butcher.*

5.2 Exercices

- ▷ **Exercice 5** (Euler implicite). Écrire le schéma pour

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- ▷ **Exercice 6** (Trapèze). Écrire le schéma pour

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- ▷ **Exercice 7** (Point milieu). Écrire le schéma pour

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- ▷ **Exercice 8** (Gauss implicite à deux étage d'ordre 4). Écrire le schéma pour

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 - \sqrt{3}/6 & 1/4 & 1/4 - \sqrt{3}/6 \\ 1/2 + \sqrt{3}/6 & 1/4 + \sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Remarque 5.2. La méthode est implicite car sur chaque pas, il faut résoudre un système d'équations non linéaires à ns équations et ns inconnues.

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} k_i = f(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad \text{pour } i = 1, \dots, s \end{array} \right.$$

Références

- [1] J.C. Butcher. *Numerical Methods For Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, 2003.
- [2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

- [3] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, volume 8 of *Springer Serie in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 1993.
- [4] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential–Algebraic Problems*, volume 14 of *Springer Serie in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 1996.