



## TD3, Automatique

O. Cots, J. Gergaud & B. Wembe

### Objectifs

Le but de ce TD est d'apprendre à stabiliser des systèmes linéaires et non linéaires par retour d'état.

Le dernier exercice est une introduction à la notion de fonction de Liapounov qui permet de montrer la stabilité de systèmes non linéaires autour d'un point d'équilibre non hyperbolique.

▷ **Exercice 1.** On considère le système linéaire suivant

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

**1.1.** Écrire le système sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t).$$

**1.2.** Donner les points de fonctionnement, c'est-à-dire tels que  $f(x_e, u_e) = 0$ .

**1.3.** Le système est-il contrôlable ?

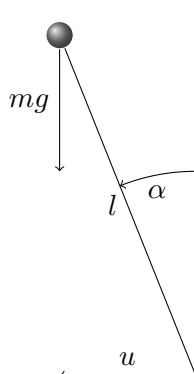
**1.4.** On considère le point de fonctionnement  $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$ .

1. On considère un contrôle par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$ . Quels valeurs doivent avoir les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  de  $K$  pour que  $x_e$  soit un point d'équilibre asymptotiquement stable, pour le système  $\dot{x}(t) = f(x(t), Kx(t))$ , avec comme unique valeur propre<sup>1</sup>  $-1$ .
2. On suppose maintenant que l'on a accès en sortie qu'à la première composante de l'état :  $y(t) = x_1(t)$  et on considère un contrôle par retour de sortie  $u(t) = ky(t)$ . Peut-on trouver des valeurs de  $k$  pour que, pour le nouveau système,  $x_e$  soit asymptotiquement stable, stable ?

▷ **Exercice 2.** La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule est l'accélération du déplacement que l'on peut exercer horizontalement.

---

1. Si on passe dans le mode fréquentiel en utilisant la transformée de Laplace, les valeurs propres sont exactement les pôles de la fonction de transfert (*cf.* le cours).

FIGURE 1 – *Pendule inversé contrôlé, version 1.*

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))u(t)}{l} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

**2.1.** L'origine est-elle stable, asymptotiquement stable, pour le système non contrôlé ?

**2.2.** 1. Déterminer les points de fonctionnement du système.

2. Donner les conditions sur  $K$  pour que le contrôle par retour d'état  $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$  stabilise asymptotiquement le système en un point de fonctionnement tel que  $\cos x_{e,1} > 0$ .

**2.3.** On se place ici autour du point de fonctionnement  $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$ . On suppose maintenant que l'on a accès en pratique qu'à la valeur de sortie  $y(t) = x_1(t) = \alpha(t)$  et on considère le contrôle par retour de sortie  $u(t) = ky(t)$ .

1. Peut-on par la méthode précédente obtenir un contrôle qui stabilise le système ?
2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{g+k}{l}(\cos x_1 - 1) + \frac{kx_1}{l} \sin x_1 + \frac{x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

- (a) Donner une relation entre  $g$  et  $k$  pour qu'il existe  $B(0, \eta)$  sur laquelle  $V(x) > 0$  si  $x \neq 0$ .
- (b) Si  $x(\cdot)$  est une solution du système montrer que  $\frac{d}{dt}(V(x(t))) = 0$ .
- (c) En déduire que le point  $(0, 0, 0)$  n'est pas asymptotiquement stable, mais qu'il est stable.