

Automatique — Système commandé

## Chapitre 2 : Systèmes dynamiques et stabilité

Olivier Cots (rédigé avec Joseph Gergaud)

19 septembre 2024



## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

- 2.1. Introduction
- 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires
- 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes
  - 2.3.1. Approche élémentaire
  - 2.3.2. Exponentielle de matrice
  - 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale
  - 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions
- 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre
- 2.5. Stabilité des équilibres
  - 2.5.1. Définition
  - 2.5.2. Résultats
  - 2.5.3. Exemples et applications

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

Nous allons étudier l'équation différentielle à valeur initiale suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement à la stabilité des équilibres de l'équation différentielle, c'est-à-dire au comportement des solutions au voisinage des points  $x_e$  tels que  $f(x_e) = 0$ .

**Remarque 2.1.1.** Si  $x_0 = x_e$  alors on a trivialement comme solution  $x(t) = x_e$  pour tout  $t$ .

**Question :** L'équilibre est-il stable ou instable ? Lorsqu'on part proche de ce point d'équilibre, on s'en rapproche ou on s'en écarte ?

**Exemple 2.1.1.** Pour le pendule simple non contrôlé, le point  $(0, 0)$  est un point d'équilibre stable, alors que  $(\pi, 0)$  est un point d'équilibre instable.

### Références.

- J. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences (2006).
- F. Jean, *Systèmes Dynamiques, Stabilité et Commande. Cours et exercices corrigés*, ENSTA, 2017–2018.

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

Soient  $\mathcal{I}$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et une application continue

$$\begin{aligned} f: \mathcal{I} \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x). \end{aligned}$$

On dit que la fonction  $\varphi$  est solution de **l'équation différentielle** (ordinaire) de **second membre**  $f$ , si  $\varphi$  est une fonction dérivable définie sur un certain intervalle  $I \subset \mathcal{I}$ , telle que pour tout  $t \in I$ ,  $\varphi(t) \in \Omega$  et

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)),$$

où  $\dot{\varphi}(t) := \varphi'(t)$ .

**Remarque 2.2.1.** On parle d'équation différentielle **non autonome** si  $f$  dépend explicitement du temps  $t$  et **autonome** sinon. Dans le cas autonome, on note  $f(x)$  au lieu de  $f(t, x)$ .

Soient  $t_0 \in \mathcal{I}$ ,  $x_0 \in \Omega$ , considérons maintenant l'équation différentielle à condition initiale, appelée **problème de Cauchy** :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

### Définition 2.2.1 – Solution d'un problème de Cauchy

On appelle **solution du problème de Cauchy** (1) tout couple  $(I, \varphi)$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathcal{I}$  contenant  $t_0$  et  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction dérivable sur  $I$ , tel que  $\forall t \in I$ ,  $\varphi(t) \in \Omega$ ,  $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$  et  $\varphi(t_0) = x_0$ .

### Proposition 2.2.2

*Si  $f$  est  $C^k$ ,  $k \in \llbracket 0, +\infty \rrbracket$  et si  $(I, \varphi)$  est une solution de (1) alors  $\varphi \in C^{k+1}$ .*

L'image de l'application  $\varphi$  s'appelle **orbite** ou **trajectoire** ou parfois **courbe de phase** et le graphe de l'application  $\varphi$ , **courbe intégrale**. Les courbes intégrales sont situées dans le produit direct de l'axe  $t$  par l'espace des phases. Ce produit direct s'appelle **espace des phases élargi**.

### Définition 2.2.3 – Solution maximale

Une solution  $(I, \varphi)$  est dite **maximale** si, pour toute autre solution  $(J, \psi)$ , on a  $J \subset I$  et  $\varphi = \psi$  sur  $J$ . On dit qu'une solution  $(I, \varphi)$  est un **prolongement** d'une autre solution  $(J, \psi)$ , si  $J \subset I$  et  $\varphi = \psi$  sur  $J$ .

### Théorème 2.2.4 – Prolongement des solutions

*Toute solution se prolonge en une solution maximale (pas nécessairement unique).*

### Définition 2.2.5 – Solution globale

Une solution **globale** est définie sur tout l'intervalle  $\mathcal{I}$ .

**Remarque 2.2.2.** Tout solution globale est maximale mais pas l'inverse.



**Exemple 2.2.1.** Considérons le système  $\dot{x}(t) = x^2(t)$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- La fonction nulle est une solution globale.
- La fonction

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t}$$

définie deux solutions respectivement sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, -\infty[$ . Ces solutions sont maximales mais non globales.

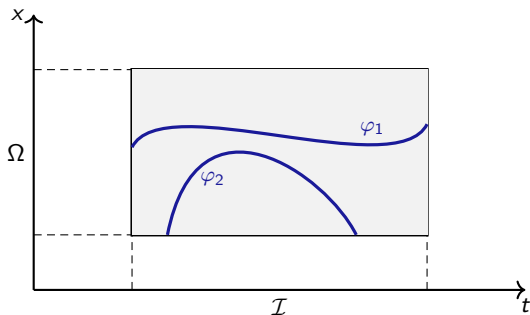


Illustration de solutions maximales, globale ( $\varphi_1$ ) et non globale ( $\varphi_2$ ).

Rappelons que nous considérons une équation différentielle de la forme  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ , où  $f: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est **continue** et où  $\mathcal{I}$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

### Proposition 2.2.6

*Par tout point de  $\mathcal{I} \times \Omega$ , il passe au moins une solution maximale.*

**Exemple 2.2.2.** En général, il n'y a pas unicité des solutions maximales comme le montre cet exemple. Considérons le problème de Cauchy :  $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ ,  $x(0) = 0$ . La fonction nulle est solution, ainsi que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ t^2/4 & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

et toutes deux sont maximales, car définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

**Théorème 2.2.7 – Théorème de Cauchy-Lipschitz**

*Soit  $f : \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{I}$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  continue et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à la variable  $x$ .*

*Alors, il existe pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \Omega$  une unique solution maximale au problème de Cauchy :  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ .*

**Remarque 2.2.3.** On peut demander moins de régularité à  $f$ . On peut supposer  $f$  continue et  $f$  localement lipschitzienne par rapport à la variable  $x$ .

Voir <https://tinyurl.com/application-localement-lipschitzienne>.

**Proposition 2.2.8**

*Soient  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert,  $A: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  et  $b: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soit  $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ . On considère le problème de Cauchy linéaire*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

*Si  $A(t)$  et  $b(t)$  sont continus sur  $\mathcal{I}$ , alors on a existence et unicité de solution globale.*

**Exemple 2.2.3** (Contre-exemple). L'équation différentielle  $\dot{x}(t) = 1 + x^2(t)$ , avec  $x(0) = 0$  admet une solution maximale  $t \mapsto \tan(t)$  définie sur l'intervalle ouvert  $]-\pi/2, \pi/2[$ . Cette solution n'est pas globale car elle n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

On s'intéresse ici à la solution du problème à valeur initiale

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

Les points d'équilibre sont les éléments de  $\text{Ker } A$ .

Si  $A$  est inversible, il n'y a qu'un seul point d'équilibre  $x_e = 0$ .

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire scalaire

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = x_0,$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On sait que la solution de cette équation, qui est unique, est donnée par

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0.$$

Cette solution est définie sur  $\mathbb{R}$  et on a le comportement asymptotique suivant :

- Si  $\lambda < 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  ;
- Si  $\lambda = 0$  alors  $x(t) = x_0$  ;
- Si  $\lambda > 0$  alors  $\begin{cases} \text{Si } x_0 < 0 \text{ alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty; \\ \text{Si } x_0 = 0 \text{ alors } x(t) = 0; \\ \text{Si } x_0 > 0 \text{ alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty. \end{cases}$



## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

Considérons l'espace vectoriel des matrices de taille  $n \times n$  muni d'une norme (matricielle) vérifiant  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  pour toutes matrices  $A$  et  $B$ . Notons  $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  cet espace. Alors, cet espace est un espace de Banach et on peut montrer que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$  est absolument convergente<sup>1</sup> puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < +\infty.$$

### Définition 2.3.1 – Exponentielle de matrice

On appelle exponentielle de matrice l'application

$$\begin{aligned} \exp: \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned}$$

1. Or dans un Banach, toute série absolument convergente est convergente, cf. Proposition 3.19.5, Wagschal, topologie et analyse fonctionnelle.

L'exponentielle de matrice

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

vérifie les propriétés suivantes.

### Théorème 2.3.2

- i)  $e^0 = I$
- ii) si  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  alors  $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
- iii) si  $P$  est inversible on a  $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$
- iv) si  $A$  et  $B$  sont deux matrices qui **commutent** alors  $e^{A+B} = e^A e^B$
- v) pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  scalaires,  $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$
- vi) pour toute matrice  $A$ ,  $e^A$  est inversible et  $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
- vii) pour toute matrice  $A$ , l'application  $t \mapsto e^{tA}$  est  $C^\infty$  et

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

► i)  $e^0 = I$  : évident.

ii) évident.

iii)  $P$  inversible :  $e^{PAP^{-1}} = \sum \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = Pe^AP^{-1}$

iv) Si  $A, B$  commutent, alors<sup>2</sup>

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Ainsi,<sup>3</sup>

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}.$$

v)  $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$  car  $\alpha A$  et  $\beta A$  commutent.

vi)  $A$  et  $-A$  commutent donc  $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$ . Ainsi,  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

vii)  $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$  : on dérive sous le signe somme.

2. Ceci est la formule du binôme de Newton.

3.  $c_n$  est donné par le produit de Cauchy.

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

**Théorème 2.3.3**

*L'unique solution globale de*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

*s'écrit*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0.$$

► Soit  $y(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ . Il suffit de montrer que  $y$  vérifie l'équation différentielle à valeur initiale  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Or

$$y(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}x_0 = e^0x_0 = Ix_0 = x_0$$

et

$$\dot{y}(t) = Ae^{(t-t_0)A}x_0 = Ay(t).$$



**Remarque 2.3.1.** On peut fixer  $t_0 = 0$ .

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

Si nous considérons le cas du système différentiel

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t), \quad x(0) = x_0,$$

avec

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La solution est alors

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} x_{0,1} \\ \vdots \\ e^{t\lambda_n} x_{0,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} x_0 = e^{t\Lambda} x_0$$

Le comportement asymptotique est alors

- si tous les  $\lambda_i$  sont strictement négatifs alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 = x_e$  ;
- si tous les  $\lambda_i$  sont négatifs ou nuls alors la solution est bornée quand  $t \rightarrow +\infty$  ;
- si au moins un  $\lambda_i$  est strictement positif et que  $x_{0,i} \neq 0$  alors  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ .



Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

On note  $P(X) = \det(XI_n - A)$  le polynôme caractéristique de  $A$  et  $\text{Sp}(A)$  le spectre de  $A$ , i.e. l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

On introduit :

- la multiplicité algébrique  $m_\lambda$  de  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  est son ordre de multiplicité en tant que racine de  $P(X)$  ;
- la multiplicité géométrique  $d_\lambda$  de  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  est la dimension du sous-espace propre associé  $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda I_n - A)$ .

On rappelle qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable ssi  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $d_\lambda = m_\lambda$  et si  $P(X)$  est scindé, i.e. de la forme  $P(X) = \prod (X - \lambda)^{m_\lambda}$ .

**Exemple 2.3.1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . On a  $P(X) = (X - \lambda)^2$  donc  $m_\lambda = 2$  mais

$$\text{Ker}(\lambda I_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc  $d_\lambda = 1$ . Au final,  $A$  est non diagonalisable.

Supposons  $A$  diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  t.q.

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

avec  $\Lambda \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonale.

Posons  $z(t) = P^{-1}x(t)$ , alors  $z(t)$  est solution de

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = P^{-1}\dot{x}(t) = P^{-1}P\Lambda P^{-1}x(t) = \Lambda z(t) \\ z(0) = P^{-1}x_0. \end{cases}$$

On a donc  $z(t) = e^{t\Lambda}P^{-1}x_0$  et

$$x(t) = Pz(t) = (Pe^{t\Lambda}P^{-1})x_0.$$

Par suite le comportement asymptotique est caractérisé par les valeurs propres de la matrice  $A$ .

$$x(t) = (P e^{t\Lambda} P^{-1})x_0, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

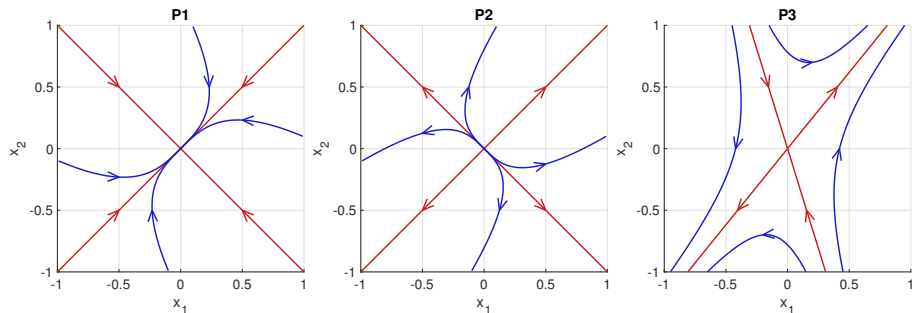


Figure 1 – (Gauche)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . (Milieu)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . (Droite)  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ .

**Remarque 2.3.2.** Si  $x_0 \in \text{Ker}(\lambda_1 I_2 - A)$ , alors  $x(t) = e^{t\lambda_1} x_0 \in \text{Ker}(\lambda_1 I_2 - A)$ .

Supposons  $A$  diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ , mais non dans  $\mathbb{R}$ .

- Il existe alors une valeur propre  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  :

$$\exists P \in GL_2(\mathbb{R}), \quad \text{tel que } A = PBP^{-1} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- Dans cette base le système  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  s'écrit  $\dot{z}(t) = Bz(t)$ .
- La solution en  $z$  est donc

$$z(t) = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} z_0 = \exp(\alpha t) R(-\beta t) z_0.$$

- Comportement asymptotique
  - Si  $\alpha < 0$  alors  $z(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ;
  - Si  $\alpha = 0$   $z(t)$  est borné ;
  - Si  $\alpha > 0$  et  $z_0 \neq 0$  alors  $\|z(t)\| \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

$$x(t) = \exp(\alpha t) (PR(-\beta t)P^{-1})x_0, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

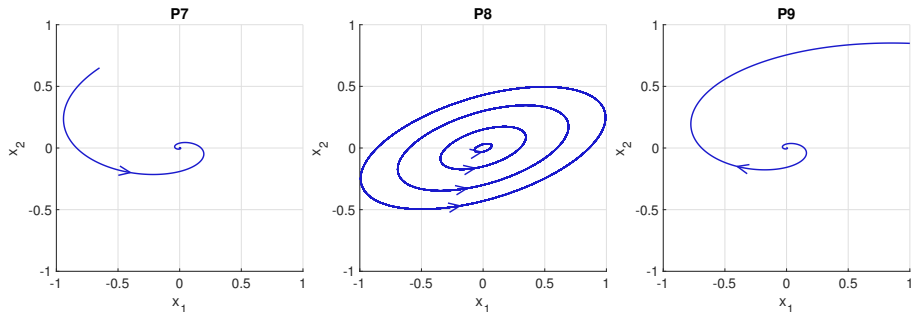


Figure 2 – (Gauche)  $\alpha < 0$ . (Milieu)  $\alpha = 0$ . (Droite)  $\alpha > 0$ .

Supposons  $A$  non diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

- L'unique valeur propre  $\lambda$  est réel et le sous espace propre est de dimension 1 et  $A$  est semblable à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Dans cette base le système différentielle s'écrit  $\dot{z}(t) = J z(t)$

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N.$$

- Les matrices commutent et la matrice  $N^2 = 0$ , donc

$$z(t) = e^{\lambda t} \left( I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) z_0.$$

- Une nouvelle fois donc, si  $\lambda < 0$  alors  $z(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

$$x(t) = e^{\lambda t} \left( P \left( I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \right) x_0.$$

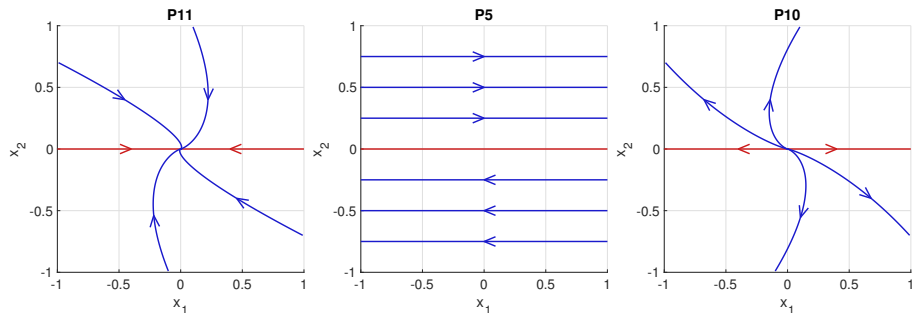


Figure 3 – (Gauche)  $\lambda < 0$ . (Milieu)  $\lambda = 0$ . (Droite)  $\lambda > 0$ .

L'objectif du TD1 est de comprendre / construire le diagramme suivant :

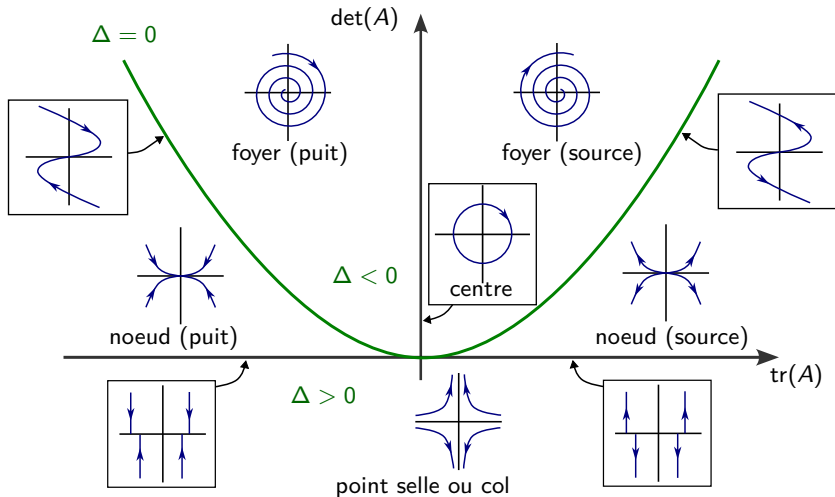


Diagramme de bifurcation dans le plan  $(\text{tr}(A), \det(A))$ ,  $\Delta = \text{tr}^2(A) - 4 \det(A)$ .



## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles linéaires à condition initiale de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

La matrice  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  est constante et la fonction  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 0$ .

### Théorème 2.4.1

*L'unique solution globale du problème de Cauchy (2) (ou problème à valeur initiale) s'écrit*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) \, ds.$$

**Remarque 2.4.1.** On ne considère pas le cas où  $A$  dépend du temps.

Vérifions que  $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$  est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

- La condition initiale est vérifiée car :

$$x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{(t-s)A}b(s)ds = x_0.$$

- L'équation différentielle est elle aussi vérifiée car :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}(e^{(t-t_0)A})x_0 + \frac{d}{dt} \left( e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds \right) \\ &= Ae^{(t-t_0)A}x_0 + Ae^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds + e^{tA}e^{-tA}b(t) \\ &= Ax(t) + b(t). \end{aligned}$$

Retrouvons la solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

On pose  $x(t) = e^{(t-t_0)A}z(t)$  et on cherche  $z(t)$ . Tout d'abord,

- $x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}z(t_0) = z(t_0) = x_0$ .
- $\dot{x}(t) = Ax(t) + e^{(t-t_0)A}\dot{z}(t)$ .

On veut donc que  $b(t) = e^{(t-t_0)A}\dot{z}(t)$ , ou encore que  $\dot{z}(t) = e^{(t_0-t)A}b(t)$ .

Finalement

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A}b(s) ds,$$

d'où

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}z(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) ds,$$

car  $e^{(t-t_0)A}e^{(t_0-s)A} = e^{(t-s)A}$ .

Cette méthode est ce que l'on appelle la méthode de la **variation de la constante**.

Supposons que  $b$  est une fonction constante, on remplace  $b(t)$  par  $-b$ . Puisque le système est autonome, on fixe  $t_0 = 0$ . On s'intéresse alors à la solution de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - b, \quad x(0) = x_0.$$

On suppose que  $b \in \text{Im } A$  et on considère  $x_e \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax_e = b$ . Le point  $x_e$  est un point d'équilibre du système  $\dot{x}(t) = Ax(t) - b$ . On fait le changement de variable

$$y(t) := x(t) - x_e.$$

Alors,  $y$  est solution de

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = Ax(t) - b = A(y(t) + x_e) - b = Ay(t), \quad y(0) = x_0 - x_e.$$

La solution de ce système est donnée par

$$y(t) = e^{tA}(x_0 - x_e).$$

Au final,  $x(t) = x_e + e^{tA}(x_0 - x_e)$  est le comportement asymptotique de la solution est donnée par les valeurs propres de  $A$ .

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

**Définition 2.5.1 – Point d'équilibre**

On appelle **point d'équilibre** tout point  $x_e$  de  $\mathbb{R}^n$  qui vérifie  $f(x_e) = 0$ .

**Définition 2.5.2 – Stabilité**

Un équilibre  $x_e$  est **stable** si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta_\varepsilon \quad \text{et} \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \|x(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon.$$

**Remarque 2.5.1.** Toute solution proche de  $x_e$  stable en reste proche.

**Définition 2.5.3 – Stabilité asymptotique**

Nous dirons qu'un équilibre  $x_e$  est **asymptotiquement stable** (A.S.) si il est stable et si il existe un voisinage  $V$  de  $x_e$  tel que, pour tout  $x_0 \in V$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = x_e.$$



Stabilité et la stabilité asymptotique au voisinage du point d'équilibre  $x_e$ .

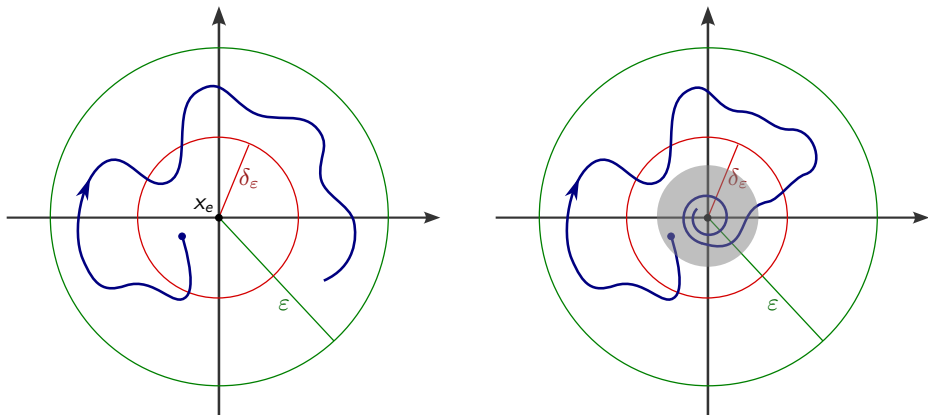


Illustration : stabilité (gauche) et stabilité asymptotique (droite) dans le plan de phase. À droite, le domaine gris représente un voisinage du point d'équilibre  $x_e$  pour lequel toute trajectoire partant de celui-ci converge vers  $x_e$  quand  $t$  tend vers l'infini.

## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

### Théorème 2.5.4

- L'origine est un *équilibre asymptotiquement stable* de

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

si et seulement si *toutes* les valeurs propres de  $A$  sont à *partie réelle strictement négative*.

- Si  $A$  a au moins *une* valeur propre à *partie réelle strictement positive*, alors l'origine *n'est pas un équilibre stable* de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ .

### Théorème 2.5.5

L'origine est un *équilibre stable* de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  ssi toutes les valeurs propres de  $A$  sont à *partie réelle négative ou nulle* et si pour toute valeur propre de *partie réelle nulle*, les *multiplicités algébrique et géométrique coïncident*.

**Théorème 2.5.6**

Soit  $x_e$  un point d'équilibre de  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . Si *toutes* les valeurs propres de

$$f'(x_e)$$

sont à *partie réelle strictement négative*, alors le point d'équilibre  $x_e$  est *asymptotiquement stable (AS)*.

**Exemple 2.5.1** (contre-exemple). Soit  $\dot{x}(t) = f(x(t)) = -x^3(t)$ . Alors,  $f'(x_e) = 0$  et pourtant  $x_e = 0$  est A.S. car pour  $x_0 \neq 0$  :  $x(t, x_0) = \text{sign}(x_0) / \sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}$ .

**Théorème 2.5.7**

Si  $f'(x_e)$  a au moins *une* valeur propre à *partie réelle strictement positive*, alors  $x_e$  n'est pas un équilibre stable.

**Remarque 2.5.2.** La réciproque est fausse.

Attention, ce n'est pas parce que toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative ou nulle que l'équilibre est stable.

**Exemple 2.5.2.** On considère les cas  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  et  $\dot{x}(t) = g(x(t))$  avec  $x_e = (0, 0)$  et

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Alors,  $x_e$  est A.S. pour  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  et instable pour  $\dot{x}(t) = g(x(t))$ .

On a tout d'abord

$$f'(x_e) = g'(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi,  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + 1$  donc  $\lambda = \pm i$ .

**Remarque 2.5.3.**  $\text{Real}(\pm i) = 0$ .

Soit  $x(\cdot)$  une solution de  $\dot{x} = f(x)$ . On pose  $\rho(t) = \|x(t)\|^2$ . On a alors  $\rho'(t) = -2\rho(t)^2$ .

Pour  $\dot{x} = g(x)$ , on a  $\rho'(t) = 2\rho(t)^2$ .

On peut alors conclure (voir polycopié) que  $x_e$  est AS pour  $f$  et instable pour  $g$ .

**Définition 2.5.8**

Un point d'équilibre est dit **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de  $f'(x_e)$  sont à partie réelle non nulle.

**Définition 2.5.8**

Un point d'équilibre est dit **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de  $f'(x_e)$  sont à partie réelle non nulle.

**Corollaire 2.5.9**

*Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable, soit non stable.*

**Remarque 2.5.4.** Pour  $n = 2$  on a en  $x_e$  un point d'équilibre :

- Si  $\det(f'(x_e)) < 0$  ou ( $\det(f'(x_e)) > 0$  et  $\text{tr}(f'(x_e)) > 0$ ) alors  $x_e$  n'est pas stable.
- Si  $\det(f'(x_e)) > 0$  et  $\text{tr}(f'(x_e)) < 0$  alors  $x_e$  est A.S.

**Cas linéaire :**  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ . On pose  $x_e = 0$ .

- $x_e$  est un eq. A.S. ssi  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) : \text{Re}(\lambda) < 0$  ;
- Si  $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$  t.q.  $\text{Re}(\lambda) > 0$  alors  $x_e$  est un eq. instable ;
- $x_e$  est un eq. stable ssi  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) : \text{Re}(\lambda) \leq 0$  et si  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$  t.q.  $\text{Re}(\lambda) = 0$  on a  $m_\lambda = d_\lambda$ .

**Cas non linéaire :**  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . Soit  $x_e$  t.q.  $f(x_e) = 0$  et  $A = f'(x_e)$ .

- Si  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) : \text{Re}(\lambda) < 0$  alors  $x_e$  A.S. ;
- Si  $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$  t.q.  $\text{Re}(\lambda) > 0$  alors  $x_e$  est un eq. instable.

**Cas hyperbolique :**  $x_e$  eq. hyperbolique ssi  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) : \text{Re}(\lambda) \neq 0$ .

- Un point d'équilibre hyperbolique est soit A.S., soit instable.



## Chapitre 2: Systèmes dynamiques et stabilité

### 2.1. Introduction

### 2.2. Solutions des équations différentielles ordinaires

### 2.3. Équations différentielles linéaires autonomes

#### 2.3.1. Approche élémentaire

#### 2.3.2. Exponentielle de matrice

#### 2.3.3. Solution du problème à valeur initiale

#### 2.3.4. Comportement asymptotique des solutions

### 2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

### 2.5. Stabilité des équilibres

#### 2.5.1. Définition

#### 2.5.2. Résultats

#### 2.5.3. Exemples et applications

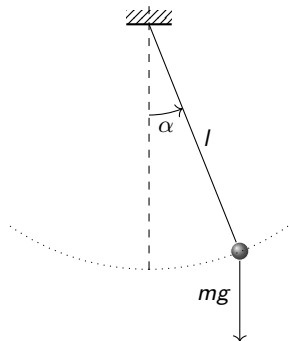
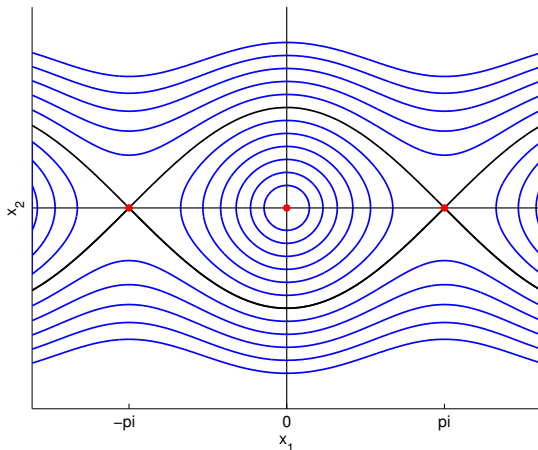


Figure 4 – Pendule simple.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

La figure ci-dessous montre les trajectoires dans le plan de phase. On a un point d'équilibre stable, mais non asymptotiquement stable et deux points d'équilibre instables. En présence de frottements, le point d'équilibre stable devient alors un point d'équilibre asymptotiquement stable.



Pendule simple :  $\dot{x}(t) = f(x(t)) = (x_2(t), -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)))$ .

On a

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc en  $x_e = (0, 0)$ , on a

$$\begin{aligned} f'(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \det(f'(x_e)) > 0 \text{ et } \operatorname{tr}(f'(x_e)) = 0 \\ &\Rightarrow \text{on ne peut pas conclure.} \end{aligned}$$

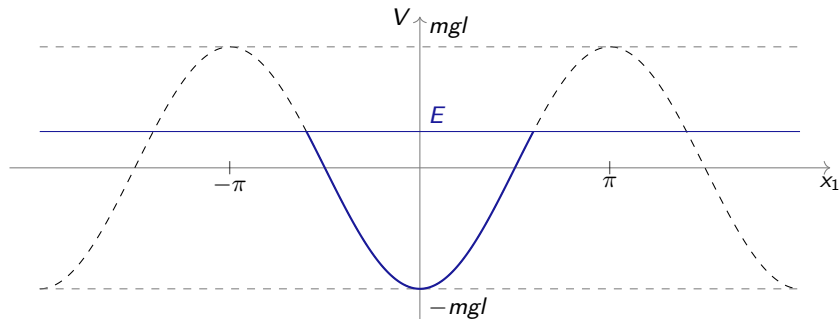
En revanche, en  $x_e = (\pi, 0)$ , on a

$$\begin{aligned} f'(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \det(f'(x_e)) < 0 \text{ et } \operatorname{tr}(f'(x_e)) = 0 \\ &\Rightarrow x_e \text{ est instable.} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique du pendule s'écrit  $E(x_1, x_2) = T(x_2) + V(x_1)$ , avec  $T(x_2) = \frac{1}{2} m l^2 x_2^2 \geq 0$  l'énergie cinétique et  $V(x_1) = -mgl \cos x_1$  l'énergie potentielle de pesanteur. On a :

$$\forall t : E(x(t)) = E(x(0)),$$

c-à-d l'énergie mécanique est conservée. On peut alors montrer que  $(0, 0)$  est stable, cf. la figure ci-dessous :



Pendule simple amorti :  $\dot{x}(t) = f(x(t)) = (x_2(t), -\frac{k}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)))$ .

En  $x_e = (0, 0)$ , on a

$$f'(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(f'(x_e)) > 0 \text{ et } \operatorname{tr}(f'(x_e)) < 0$$

$$\Rightarrow x_e \text{ est A.S.}$$

On a de plus :  $\Delta = \operatorname{tr}(f'(x_e))^2 - 4\det(f'(x_e)) = \frac{k^2}{m^2l^4} - 4\frac{g}{l}$ .

Ainsi :

- Si  $\Delta > 0$ , alors  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\frac{k}{ml^2} \pm \sqrt{\Delta}) < 0$  : cas P1, Fig. 1, slide 27.
- Si  $\Delta < 0$ , alors  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\frac{k}{ml^2} \pm i\sqrt{|\Delta|}) = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha < 0$  : cas P7, Fig. 2, slide 29.
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $\lambda = \lambda_{1,2} = -\frac{k}{2ml^2} < 0$  et  $\dim(\operatorname{Ker}(f'(x_e) - \lambda I_2)) = 1$  : cas P11, Fig. 3, slide 31.

**Question :** Dans le cas du pendule simple amorti, a-t-on montré que pour  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\alpha}_0 = 0$ , le système allait converger vers l'équilibre A.S.  $(0, 0)$  ?

**Question :** Dans le cas du pendule simple amorti, a-t-on montré que pour  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\alpha}_0 = 0$ , le système allait converger vers l'équilibre A.S.  $(0, 0)$  ?

**Réponse :** Non, on ne l'a pas montré !

On a montré que  $\exists \bar{\alpha}_0 > 0$ ,  $\exists \dot{\bar{\alpha}}_0 > 0$  t.q.

$$\forall (\alpha_0, \dot{\alpha}_0) \in V_0 = ]-\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_0[ \times ]-\dot{\bar{\alpha}}_0, \dot{\bar{\alpha}}_0[ \in \mathcal{V}(0, 0), (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \rightarrow (0, 0),$$

avec  $(\alpha(0), \dot{\alpha}(0)) = (\alpha_0, \dot{\alpha}_0)$ . Mais on ne connaît pas  $\bar{\alpha}_0$ ,  $\dot{\bar{\alpha}}_0$  ! Pour aller plus loin, il faut utiliser la théorie de Lyapunov.

**Attention :** dans le cas non linéaire, la notion de stabilité est locale !