

Automatique - Partie Système commandé

Chapitre 3 : Stabilisation d'un système par retour d'état autour d'un point de fonctionnement

O. Cots et J. Gergaud



Département Sciences du Numérique

28 septembre 2021

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

- Hypothèse : f est de classe C^1 et définie sur $\Omega \times U$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ouvert, $U \subset \mathbf{R}^m$.
- Pour une loi de commande $u : J \rightarrow U$, J intervalle ouvert contenant t_0 , $f_u(\cdot, x)$ peut ne pas être continue, car u peut être discontinue.

Qu'est-ce qu'une solution de $(IVP)_1$?

Définition

Une fonction f de $I = [a, b]$, $a < b$ à valeurs dans \mathbf{R}^n est absolument continue sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toutes familles d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 $(]a_i, b_i[)_{i=1\dots,N}$, $a_i < b_i$, on a

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) \leq \eta \implies \sum_{i=1}^N \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème

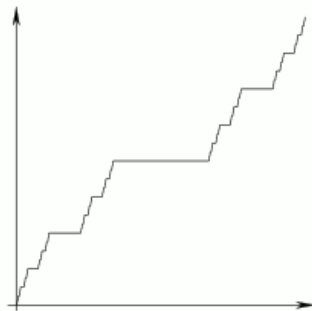
$f : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ est absolument continue si et seulement si f' existe presque partout, appartient à $L^1([a, b])$ et que l'on ait

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

L'intégrale est prise au sens de Lebesgue.

Fonction absolument continue

L'escalier de Cantor, ou escalier du diable, est le graphe d'une fonction f continue croissante sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, qui est dérivable presque partout, la dérivée étant presque partout nulle. Cette fonction ne peut donc pas être absolument continue.



Escalier de Cantor.

Définition (Solution faible)

On appelle solution faible de (IVP)₁ tout couple (I, x) , I intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant t_0 et $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ localement absolument continue vérifiant

- ① $(t, x(t)) \in J \times \Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \forall t \in I$
- ② $\dot{x}(t) = f_u(t, x(t)),$ pour presque tout $t \in I$
- ③ $x(t_0) = x_0.$

Théorème

(I, x) est une solution faible de (IVP)₁ si et seulement si $(t, x(t)) \in J \times \Omega$ pour tout t dans I , la fonction $t \mapsto f_u(t, x(t))$ est localement intégrable et

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) ds.$$

Remarque

Si f_u est continue, alors (I, x) est une solution faible si et seulement si (I, x) est une solution classique.

Afin que les solutions du système différentiel soient bien définies, il nous faut donc, concernant le contrôle nous placer dans le bon espace fonctionnel qui est ici

$$\mathcal{U} = L^\infty([t_0, \tau], U),$$

l'espace des fonctions de $[t_0, \tau]$ à valeurs dans $U \subset \mathbf{R}^m$ essentiellement bornées, c'est-à-dire des fonctions vérifiant

$$\|u\|_\infty = \text{Supess}_{[t_0, \tau]} \|u(t)\| < +\infty.$$

Remarque

Pour simplifier, on peut prendre les fonctions u continues par morceaux.

Théorème

Soit $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbf{R}^n, C^1, \Omega$ ouvert de $\mathbf{R}^n, U \subset \mathbf{R}^m, x_0 \in \Omega$. Alors pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe une solution maximale unique au système différentiel à condition initiale

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

définie sur $I = [t_0, \tau_u[$ ou $[t_0, \tau]$.

Remarque

On prendra toujours ici l'instant initial $t_0 = 0$ et $I = [0, \tau_u[$ et on notera $x(\cdot, x_0, u)$ la solution de $(IVP)_1$. $J = [0, \tau]$ est ici un intervalle fermé, il faut donc adapter les définitions précédentes, ce qui se fait sans mal.

On s'intéresse ici à la relation entre l'entrée et l'état ($y(t) = x(t)$).

$$(\Sigma)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Définition

Étant donné $x_0 \in \mathbf{R}^n$, on dit que l'état $x_f \in \mathbf{R}^n$ est atteignable en temps τ à partir de x_0 s'il existe une commande $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbf{R}^m$ telle que $x(\tau, x_0, u) = x_f$. On note $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ l'ensemble des états atteignables à partir de x_0 en temps τ :

$$\mathcal{A}(\tau, x_0) = \{x(\tau, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

Contrôlabilité - Définition

Soit u une commande et $x_0 \in \mathbf{R}^n$, l'unique solution de $(\Sigma)_1$ est

$$x(t, x_0, u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Remarque

Si $x_0 = 0$ on a $x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds$ qui dépend linéairement de la commande u . $\mathcal{A}(\tau, 0)$ est donc un espace vectoriel et $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ est l'espace affine $e^{\tau A}x_0 + \mathcal{A}(\tau, 0)$. Donc l'espace $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ est complètement caractérisé par l'ensemble $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}(\tau, 0)$.

Définition

Le système $(\Sigma)_1$ est contrôlable en temps τ si $\mathcal{A}_\tau = \mathbf{R}^n$, ou de façon équivalente si tout état est atteignable en temps τ à partir de n'importe quel état initial.

Théorème

\mathcal{A}_τ est égal à l'image de la matrice (n, nm) de contrôlabilité

$$C = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B).$$

Remarque

- ① \mathcal{A}_τ est indépendant de τ .
- ② $\dim \mathcal{A}_\tau = \text{rang}(C)$.

Corollaire (Critère de contrôlabilité de Kalman)

Le système $(\Sigma)_1$ est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité est de rang n .

Corollaire (Critère de contrôlabilité de Kalman)

Le système $(\Sigma)_1$ est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité est de rang n .

Exemple

$$(\Sigma)_2 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$C = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et puisque $\text{rang}(C) = 2$, le système est contrôlable.

On s'intéresse maintenant sur l'intervalle $[0, \tau]$, $\tau > 0$, au système contrôlé linéaire et autonome

$$(\Sigma)_3 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

La question que l'on se pose ici est de savoir si connaissant $y(t)$ et $u(t)$ sur $[0, \tau]$, on peut retrouver l'état initial x_0 .

Remarque

- ① *La connaissance de $x(0) = x_0$ et de $u(t)$ pour tout t est équivalente à celle de $x(t)$, $\forall t \in [0, \tau]$ car*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)u(s)ds.$$

Remarque

- 1 On peut ici supposer que $D = 0$. En effet, connaître $y(t)$ est équivalent à connaître $z(t) = y(t) - Du(t)$.
- 2 On peut aussi supposer que $B = 0$. Si on pose

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) u(s) ds = e^{tA} x_0,$$

alors \tilde{x} vérifie l'équation différentielle $\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$. Posons $z(t) = y(t) - C \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) u(s) ds = C\tilde{x}(t)$.

L'observabilité se ramène à l'observabilité du système

$$(\Sigma)_4 \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) \\ z(t) = C\tilde{x}(t). \end{cases}$$

Définition

Le système $(\Sigma)_1$ est dit observable, si la connaissance de $y(\cdot)$ et de $u(\cdot)$ sur $[0, \tau]$ déterminent de façon univoque $x(0)$.

Théorème (Critère d'observabilité de Kalman)

Posons

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le système $(\Sigma)_1$ est observable si et seulement si $\ker O = \{0\}$.

Remarque

Le système $(\Sigma)_1$ est observable si et seulement si $\ker O = \{0\}$. Ceci est équivalent à $\text{Im } O^T = \mathbf{R}^n$, où encore à $\text{Im}(C^T A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T) = \mathbf{R}^n$. Par suite le système $(\Sigma)_1$ est observable si et seulement si le système dual

$$(\Sigma)_5 \left\{ \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t) \right.$$

est contrôlable.

Stabilisation par retour d'état

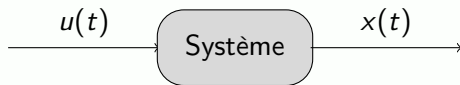


Figure 1 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle ouverte.

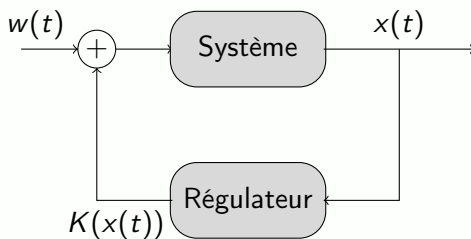


Figure 2 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée par retour d'état.

Définition (Point de fonctionnement)

On appelle point de fonctionnement d'un système contrôlé un point tel que $f(x_e, u_e) = 0$.

Si (x_e, u_e) est un point de fonctionnement alors bien évidemment $x(t) = x_e$ est une solution du problème de Cauchy

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_e, \end{cases}$$

où le contrôle est $u(t) = u_e$ pour tout t .

On considère donc ici le cas de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

et où le point de fonctionnement est le point d'équilibre du système non contrôlé, c'est-à-dire que $(x_e, u_e) = (0, 0)$ (A est supposé inversible).

Définition

Le système contrôlé $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit asymptotiquement stable par retour d'état s'il existe un contrôle $u(t) = K(x(t))$ tel que l'origine soit un équilibre asymptotiquement stable de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = Ax(t) + BK(x(t))$, appelée équation du système bouclé.

Remarque

- *On va ici chercher un contrôle de la forme $u(t) = K x(t)$, K une matrice (m, n) . On dit alors que l'on a une loi de contrôle proportionnelle.*
- *Dans ce cas si le système contrôlé est asymptotiquement stable, on aura donc $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour toutes conditions initiales.*

Le système bouclé s'écrit alors

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

Le problème se ramène alors à **trouver une matrice K** tel que toutes les valeurs propres de $A + BK$ soient à partie réelle strictement négative.

Théorème (Théorème de placement de pôles)

Si les matrices A et B satisfont au critère de Kalman, c'est-à-dire si le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable, alors pour tout $\rho \in \mathbf{R}$, il existe une matrice K telle que les valeurs propres de $A + BK$ soient à partie réelle strictement inférieure à ρ .

Exemple

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_1 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

- 1 *Donner les points de fonctionnement*
- 2 *Trouver $K = (k_1 \quad k_2)$ pour avoir comme pôle -1 .*
- 3 *Peut-on trouver k tel que le système puisse être stabilisé à l'aide du contrôle $u(t) = k x_1(t)$?*

Remarque : Dans le TD2, on introduira la notion de régulateur PID (Proportionnel, Intégral, Dérivée) sur un exemple de stabilisation dans le cas linéaire puis le premier exercice du TD3 répondra aux questions de cet exemple.

- On considère un système contrôlé non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- On s'intéresse à la stabilisation autour d'un point de fonctionnement (x_e, u_e) par retour d'état proportionnel $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.
- Le système bouclé est donc

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e)) = f(x(t), \bar{u}(x(t))) = g(x(t)),$$

avec $\bar{u}(x) = u_e + K(x - x_e)$. x_e est un point d'éq., car $g(x_e) = 0$.

- On a alors

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \bar{u}(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}(x)) K.$$

Par suite

$$g'(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) K = A + B K.$$

Il faut trouver K telle que les valeurs propres de

$$g'(x_e) = A + B K$$

soit à partie réelle strictement négative.

Remarque

En pratique les contrôles sont contraints. Par exemple si le contrôle est l'intensité d'un courant il doit avoir une valeur positive ou nulle et doit être borné par une valeur maximale, par suite $U \neq \mathbf{R}^m$. La contrôlabilité, la stabilité, etc. sont alors plus difficiles à obtenir.

Exemple

On considère un mélangeur^a dans lequel arrive un même produit, par deux entrées différentes, avec des concentrations respectivement c_1 et c_2 (constantes), et des débits $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Le volume dans le mélangeur est noté $V(t)$ et la concentration $c(t)$. Le débit en sortie est $d(t) = \gamma\sqrt{V(t)}$, où γ est une constante. Les contrôles sont $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Un bilan volume-matière permet d'établir que l'on a le système

$$(S) \begin{cases} \dot{V}(t) = u_1(t) + u_2(t) - \gamma\sqrt{V(t)} \\ \dot{c}(t) = \frac{1}{V(t)}((c_1 - c(t))u_1(t) + (c_2 - c(t))u_2(t)) \end{cases}$$

- 1 Donner la fonction f qui permet d'écrire le système $(S) \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- 2 Démontrer qu'un point de fonctionnement du système est un point où

$$\begin{aligned} u_{1e} + u_{2e} &= d_e = \gamma\sqrt{V_e} \\ c_1 u_{1e} + c_2 u_{2e} &= c_e d_e = c_e \gamma\sqrt{V_e} \end{aligned}$$

a. Trélat, page 57

Exemple

$$(S) \begin{cases} \dot{V}(t) = u_1(t) + u_2(t) - \gamma \sqrt{V(t)} \\ \dot{c}(t) = \frac{1}{V(t)} ((c_1 - c(t))u_1(t) + (c_2 - c(t))u_2(t)) \end{cases}$$

- ③ Écrire $\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $\frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$ en fonction de $\alpha = \frac{-\gamma}{2\sqrt{x_{e1}}}$, $\beta_1 = \frac{c_1 - c_e}{V_e}$ et $\beta_2 = \frac{c_2 - c_e}{V_e}$.
- ④ Donner les conditions que doivent vérifier les coefficients de K afin qu'un contrôle par retour d'état puisse stabiliser asymptotiquement le système autour de son point de fonctionnement.

Remarque : Dans le TD3, on s'intéressera à la stabilisation par retour d'état par linéarisation sur un exemple similaire à celui-ci.

Définition

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de f la fonction de \mathbf{C} dans \mathbf{C} définie par

$$F(p) = \mathcal{L}(f(\cdot))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Remarque

F n'est pas a priori définie pour tout $p \in \mathbf{C}$.

Proposition

- ❶ *Linéarité* : $\mathcal{L}(f(\cdot) + \alpha g(\cdot))(p) = F(p) + \alpha G(p)$.
- ❷ $\mathcal{L}(f(\cdot - \tau))(p) = e^{\tau p} F(p)$.
- ❸ *Transformée de Laplace de la dérivée* : $\mathcal{L}(f'(\cdot))(p) = pF(p) - f(0^+)$.
- ❹ *Transformée de Laplace de l'intégrale*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^\cdot f(\tau) d\tau\right)(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

- ❺ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$.
- ❻ *Transformée de Laplace du produit de convolution*

$$\mathcal{L}(f(\cdot) * g(\cdot))(p) = \mathcal{L}\left(\int_0^\cdot f(\tau) g(\cdot - \tau) d\tau\right)(p) = F(p)G(p).$$

Fonction de transfert - Transformée de Laplace de $(\Sigma)_1$

Si on prend la transformée de Laplace du système $(\Sigma)_1$ avec comme condition initiale $x(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} pX(p) &= AX(p) + BU(p) \Rightarrow (pI - A)X(p) = BU(p) \\ &\Rightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} Y(p) &= (C(pI - A)^{-1}B + D)U(p) \\ &= \left(\frac{C \operatorname{co}(pI - A)^T B}{\det(pI - A)} + D \right) U(p) = H(p)U(p), \end{aligned}$$

$\operatorname{co}(M)^T$ = la transposée de la matrice des co-facteurs de M .

Définition (Fonction de transfert)

La fonction H s'appelle fonction de transfert et on représente le système par le schéma de la figure 3.

Remarque

Attention, la fonction de transfert suppose toujours que l'on a $x(0) = 0$ comme condition initiale.

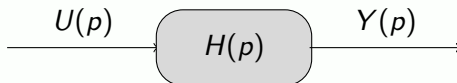


Figure 3 – Système représenté par sa fonction de transfert.

Définition

La fonction de transfert H est une fonction rationnelle : $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$. On appelle zéros de la fonction de transfert les zéros du numérateur N et pôles de la fonction de transfert les zéros du dénominateur D .

Remarque

Les pôles de la fonction de transfert H sont les valeurs propres de la matrice A .

① Opérateur dérivée

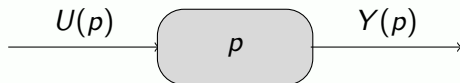


Figure 4 – $Y(p)$ est la transformée de Laplace de la dérivée de u .

② Opérateur d'intégration

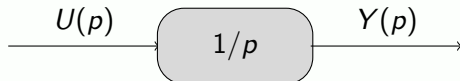


Figure 5 – $Y(p)$ est la transformée de Laplace de l'intégrale de u .

On retrouvera ceci dans le langage graphique de Simulink.