

Automatique — Système commandé

Chapitre 1 : Introduction à la théorie des systèmes

Olivier Cots (rédigé avec Joseph Gergaud)

18 septembre 2023



Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

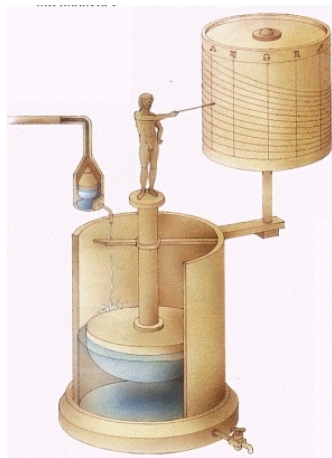


Figure 1 – Clepsydre (Ctésibios d'Alexandrie en -270).

- Régulateur à flotteur pour des horloges à eau ;
- La pompe aspirante à double effet automatique ;
- ...
- Livre de la connaissance des procédés mécaniques vers 1205. Des copies se trouvent
 - à Topkapi à Istanbul
 - au Musée des Beaux-Arts à Boston
 - au musée du Louvre à Paris
 - à la Bibliothèque d'Oxford

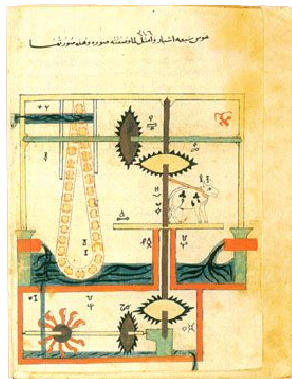


Figure 2 – Manuscrit d'Al-Jazari, vers 1205.

- Régulation de la température ;
- Moulin à vent ;
- Soupape de sécurité de Papin ;
- Régulateur à boules de James Watt pour réguler la vitesse de rotation d'une machine à vapeur.¹

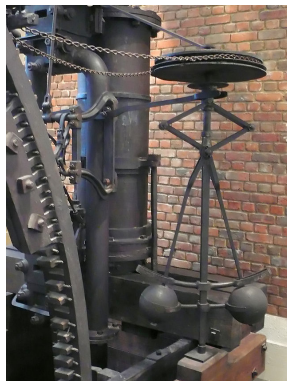


Figure 3 – Boulton & Watt engine of 1788.

1. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steam_engine_in_action.gif

- Équations différentielles ordinaires ;
- Équations aux dérivées partielles ;
- Analyse stochastique (Kolmogorov, Wiener. . .), théorie des processus stochastiques ;
- Stabilité ;
- Contre réaction (feedback) ;
- ...

- Théorie de la commande non linéaire ;
- Théorie de la commande optimale (Bellman, Kalman, Pontryagin...) ;
- Contrôlabilité, observabilité ;
- Commande robuste ;
- ...

Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

Si $\ddot{\alpha}(t)$ désigne la dérivée seconde de l'angle α par rapport au temps t , l'évolution du mouvement est

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t),$$

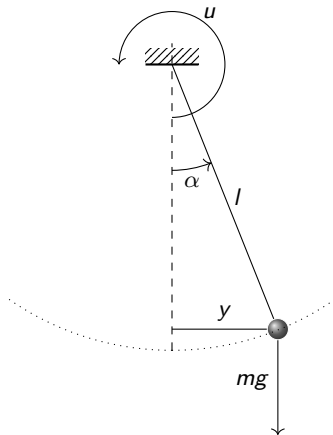


Figure 4 – Pendule simple contrôlé.

On pose $x(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(z_1) + \frac{v}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Ceci est une **équation** dont l'inconnue est la fonction $x(\cdot)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Pour une commande $u(\cdot)$ et un point initial x_0 donnés, on cherche une fonction du temps t que l'on peut noter $x(\cdot)$, ou $\varphi(\cdot)$ par exemple, qui vérifie $\varphi(0) = x_0$ et à tout instant t : $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), u(t))$.

- Le second membre f de l'équation est une **fonction** de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n , où n est la dimension de $x(t)$ et m est la dimension de $u(t)$.

On peut en pratique avoir accès à différentes variables de sortie (mesurées) :

- $y(t) = \alpha(t) = x_1(t)$;
- $y(t) = x(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$;
- $y(t) = l \sin(\alpha(t))$ = la distance entre la masse et l'axe des ordonnées.

On écrira ces variables de sortie sous la forme $y(t) = g(x(t), u(t))$.

En pratique il y a des frottements. Une meilleure modélisation du système est donc

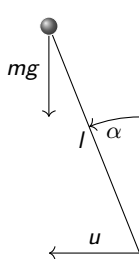
$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + \frac{k}{m}\dot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t).$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

L'application f s'écrit alors

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{u}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Figure 5 – *Pendule inversé contrôlé, version 3.*

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{u(t)}{l^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

Nous décrivons ici le modèle du Robot Lego qui sera utilisé en TP.

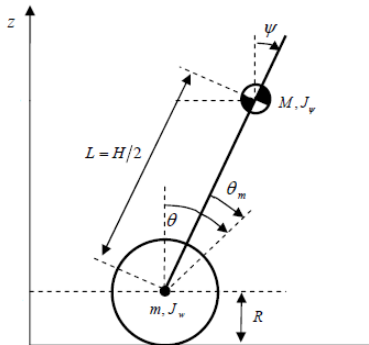


Figure 6 – Robot Lego segway ([vidéo](#)).

Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

Voici d'autres exemples plus complexes :

- pilote automatique d'un avion ;
- contrôle des gouvernes d'un avion ;
- contrôle de freinage ABS ;
- contrôle de vol d'un drone ;
- contrôle de vol d'un [flyboard](#) ;
- pompe à insuline.
- ...

Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

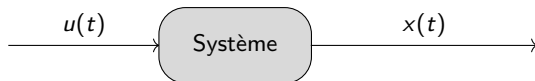


Figure 7 – Schéma fonctionnel simple d'un système en **boucle ouverte**.

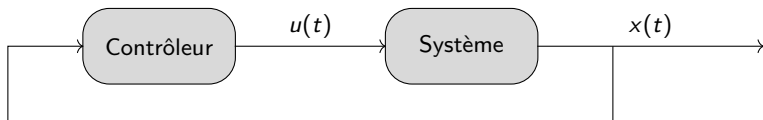


Figure 8 – Schéma fonctionnel simple d'un système en **boucle fermée**.

Dan ce schéma, $d(t)$ est une perturbation extérieure du système.

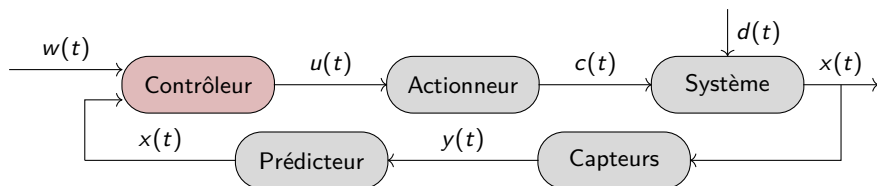


Figure 9 – Schéma fonctionnel complet d'un système en boucle fermée.

- État $x(t) \in \mathbb{R}^n$
- Commande ou contrôle ou variable d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^m$
- Variable de sortie ou mesurée $y(t) \in \mathbb{R}^p$
- Consigne $w(t) \in \mathbb{R}$
- Système = Équation d'état : $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$
- Équation de sortie $y(t) = g(t, x(t), u(t))$.

Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

Définition 1.3.1 – Point de fonctionnement, point d'équilibre

On appelle point de fonctionnement d'un système un point (x_e, u_e) tel que $f(x_e, u_e) = 0$. On dit que x_e est un point d'équilibre (pour le contrôle u_e).

Exemple 1.3.1. Pour le pendule simple on a pour $u_e = 0$ deux points d'équilibre : $x_0 = (0, 0)$ et $x_e = (\pi, 0)$.

Une fois le modèle bien défini, plusieurs questions se posent :

- Sur l'analyse et le comportement dynamique du système
 - **Commandabilité ou contrôlabilité du système.** Existe-t-il un contrôle $u(\cdot)$ qui amène le système d'un état initial donné x_0 à un état final x_f en un temps $t = t_f$ fixé?
 - **Observabilité.** Connaissant la variable de sortie $y(t)$ et le contrôle $u(t)$ pour tout $t \in [0, \tau_u[$, peut-on déterminer l'état $x(t)$ pour tout $t \in [0, \tau_u[$, ou de manière équivalente $x(0)$.

- Sur la synthèse des lois de contrôle
 - **Planification de trajectoires.** Si le système est contrôlable, comment trouver un contrôle qui amène l'état de x_0 à x_f en un temps t_f fixé ?
 - **Stabilisation.** Comment construire un contrôle qui stabilise asymptotiquement le système autour d'un point d'équilibre x_e , c'est-à-dire tel que, pour toute condition initiale, on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e ?$$

- **Synthèse d'observateurs.** En cas de réponse positive à la question de l'observabilité, comment déterminer l'état $x(\cdot)$ à partir de la connaissance de $y(\cdot)$ et de $u(\cdot)$?
- **Contrôle optimal.** Trouver le meilleur contrôle qui amène l'état de x_0 à x_f en un temps t_f fixé ou libre.

Chapitre 1: Introduction à la théorie des systèmes

- Étude mathématique du système contrôlé
 - Étude du système non contrôlé : point d'équilibre d'une edo (rappels pour certains)
 - Contrôlabilité, observabilité
 - Calcul du contrôle
- Simulation numérique
 - Matlab
 - Simulink → code C
- Capteurs
- Code embarqué sur le robot
- Gestion du temps réel

- Introduction
- Chapitre 1 : Introduction à la théorie des systèmes, définitions
 - Introduction historique
 - Théorie du contrôle : Exemples simples, Robot. . .
 - Définitions, objectifs
- Chapitre 2 : Stabilité des systèmes dynamiques
 - Introduction
 - Cas des équations différentielles linéaires homogènes et autonomes
 - Équations différentielles linéaires avec second membre
 - Équation différentielle ordinaire non linéaire
 - Stabilité
 - Intégration numérique : Runge-Kutta explicite (Euler. . .)
- Chapitre 3 : Commande des systèmes
 - Cas linéaires : contrôlabilité, observabilité, stabilisation par retour d'état
 - Cas non-linéaire : stabilisation par retour d'état