



Examen – Automatique

Session 1, lundi 14 novembre 2022

Durée : 1h30

1 Information, Consignes

- Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite ;
- Un corrigé sera accessible sous le `git` dans la journée.

▷ **Exercice 1.** (10 points) Soit γ une constante réelle fixée. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \gamma u(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

1.1. Écrire ce système sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. On donnera les matrices A et B .

1.2. Pour quelles valeurs de γ le système est-il contrôlable ?

1.3. Donner les points de fonctionnement de (S) ?

1.4. On considère un contrôle par retour d'état autour du point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0) : u(t) = Kx(t)$.

1. Quels sont les dimensions de la matrice K .
2. Quelles conditions doivent vérifier les coefficients de la matrice K pour que l'on stabilise asymptotiquement le système contrôlé par retour d'état autour de ce point de fonctionnement.

1.5. On considère maintenant un contrôle par retour d'état autour du point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (1, 0, 0) : u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Écrire l'équation différentielle dont est solution ce système contrôlé par retour d'état : $\dot{x}(t) = g(x(t))$. On donnera la fonction g .
2. Vérifier que $x_e = (1, 0)$ est un point d'équilibre de ce système.
3. Quelles conditions doivent vérifier les coefficients de la matrice K pour que l'on stabilise asymptotiquement le système contrôlé par retour d'état autour de ce point de fonctionnement.

▷ **Exercice 2.** (10 points)

On considère le modèle suivant ¹

$$(S) \begin{cases} \dot{y}(t) = -v(t) \cos \delta(t) \cos \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = \frac{v(t) \sin \delta(t)}{L} \\ \dot{v}(t) = u_1(t) \\ \dot{\delta}(t) = u_2(t) \end{cases}$$

où L est une constante.

2.1. Donner la fonction f permettant d'écrire l'équation différentielle sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Le système est-il linéaire ? Si oui, on donnera les matrices A et B .

2.2. Donner les points de fonctionnement (x_e, u_e) de ce système.

2.3. On considère le point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (5, \pi/2, 7, 0, 0, 0)$ et un contrôle par retour d'état autour de ce point de fonctionnement (x_e, u_e) : $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Quels sont les dimensions de la matrice K .
2. Donner la matrice dont les valeurs propres doivent être à partie réelle négative stricte pour que l'on stabilise asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement.
3. Avec une valeur de K qui vérifie la condition ci-dessus, et partant d'un point très éloigné du point de fonctionnement, que peut-on dire de la limite de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2.4. On suppose maintenant que l'on accède en pratique qu'à la variable δ . Peut-on trouver un contrôle par retour de sortie : $u(t) = u_e + K(\delta(t) - \delta_e)$ permettant de stabiliser asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement.

1. Ce modèle vient d'un régulateur de voiture.