



## Examen – Automatique

Session 1, lundi 14 novembre 2022

Durée : 1h30

### 1 Information, Consignes

- Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite ;
- Un corrigé sera accessible sous le `git` dans la journée.

▷ **Exercice 1.** (10 points) Soit  $\gamma$  une constante réelle fixée. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \gamma u(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

**1.1.** Écrire ce système sous la forme  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ . On donnera les matrices  $A$  et  $B$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**1.2.** Pour quelles valeurs de  $\gamma$  le système est-il contrôlable ?

La matrice de contrôlabilité est

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 quel que soit la valeur de  $\gamma$ . Par suite le système est contrôlable pour toutes les valeurs de  $\gamma$ .

**1.3.** Donner les points de fonctionnement de  $(S)$  ?

$$\begin{cases} x_2 + \gamma u = 0 \\ u = 0 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow (x_e, u_e) = (x_{e1}, 0, 0).$$

**1.4.** On considère un contrôle par retour d'état autour du point de fonctionnement  $(x_e, u_e) = (0, 0, 0) : u(t) = Kx(t)$ .

1. Quels sont les dimensions de la matrice  $K$ .

$K$  est de dimension  $(1, 2)$ .

2. Quelles conditions doivent vérifier les coefficients de la matrice  $K$  pour que l'on stabilise asymptotiquement le système contrôlé par retour d'état autour de ce point de fonctionnement.

Le système contrôlé par retour d'état s'écrit  $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$  avec

$$A + BK = \begin{pmatrix} \gamma k_1 & 1 + \gamma k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Il faut que cette matrice ait ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire que

- $\det(A + BK) = -k_1 > 0$ ;
- $\text{trace}(A + BK) = \gamma k_1 + k_2 < 0$ .

**1.5.** On considère maintenant un contrôle par retour d'état autour du point de fonctionnement  $(x_e, u_e) = (1, 0, 0) : u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$ .

1. Écrire l'équation différentielle dont est solution ce système contrôlé par retour d'état :  $\dot{x}(t) = g(x(t))$ . On donnera la fonction  $g$ .

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto g(x) = (A + BK)x - BKx_e. \end{aligned}$$

2. Vérifier que  $x_e = (1, 0)$  est un point d'équilibre de ce système.

$$g(x_e) = Ax_e = 0.$$

3. Quelles conditions doivent vérifier les coefficients de la matrice  $K$  pour que l'on stabilise asymptotiquement le système contrôlé par retour d'état autour de ce point de fonctionnement.

Posons  $y(t) = x(t) - x_e$ , alors  $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - BKx_e = (A + BK)(x(t) - x_e) = (A + BK)y(t)$ .

Par suite sous les mêmes conditions qu'à la question 1.4,  $y(t)$  convergera vers  $(0, 0)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $x(t)$  convergera vers  $x_e$ .

▷ **Exercice 2.** (10 points)

On considère le modèle suivant <sup>1</sup>

1. Ce modèle vient d'un régulateur de voiture.

$$(S) \begin{cases} \dot{y}(t) = -v(t) \cos \delta(t) \cos \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = \frac{v(t) \sin \delta(t)}{L} \\ \dot{v}(t) = u_1(t) \\ \dot{\delta}(t) = u_2(t) \end{cases}$$

où  $L$  est une constante.

**2.1.** Donner la fonction  $f$  permettant d'écrire l'équation différentielle sous la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . Le système est-il linéaire ? Si oui, on donnera les matrices  $A$  et  $B$ .

$$f : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$$

$$(x, u) = (y, \theta, v, \delta, u_1, u_2) \longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} -v \cos \delta \cos \theta \\ (v \sin \delta)/L \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

**2.2.** Donner les points de fonctionnement  $(x_e, u_e)$  de ce système.

$$f(x, u) = 0 \iff \begin{cases} v \cos \delta \cos \theta = 0 \\ v \sin \delta = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v = 0 \text{ et } u_1 = u_2 = 0 \\ \text{ou } (\delta = k\pi \text{ et } \theta = \pi/2 + k'\pi \text{ et } u_1 = u_2 = 0). \end{cases}$$

Les points de fonctionnement sont donc  $(y_e, \theta_e, 0, \delta_e, 0, 0)$  ou  $(y_e, \pi/2 + k'\pi, v_e, k\pi, 0, 0)$ .

**2.3.** On considère le point de fonctionnement  $(x_e, u_e) = (5, \pi/2, 7, 0, 0, 0)$  et un contrôle par retour d'état autour de ce point de fonctionnement  $(x_e, u_e)$  :  $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$ .

1. Quels sont les dimensions de la matrice  $K$ .

$K$  est de dimension  $(2, 4)$ .

2. Donner la matrice dont les valeurs propres doivent être à partie réelle négative stricte pour que l'on stabilise asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement.

Le système par retour d'état s'écrit  $\dot{x}(t) = g(x(t)) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e))$  et

$$J_g(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)K.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & v \cos \delta \sin \theta & -\cos \delta \cos \theta & v \sin \delta \cos \theta \\ 0 & 0 & \sin \delta / L & v \cos \delta / L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite il faut que la matrice suivante soit à valeur propre à partie réelle strictement négative pour stabiliser asymptotiquement le système autour du point de fonctionnement.

$$J_g(5, \pi/2, 7, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/L \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}$$

3. Avec une valeur de  $K$  qui vérifie la condition ci-dessus, et partant d'un point très éloigné du point de fonctionnement, que peut-on dire de la limite de  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

On ne peut rien dire car on est ici dans le cas non linéaire et les résultats de stabilité asymptotique ne sont que locaux.

**2.4.** On suppose maintenant que l'on accède en pratique qu'à la variable  $\delta$ . Peut-on trouver un contrôle par retour de sortie :  $u(t) = u_e + K(\delta(t) - \delta_e)$  permettant de stabiliser asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement.

Par un calcul similaire on obtiendra alors la matrice

$$J_{\tilde{g}}(5, \pi/2, 7, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/L \\ 0 & 0 & 0 & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^3(\lambda - k_{24}).$$

Les valeurs propres ne peuvent donc être à partie réelle strictement négative. On ne peut alors stabiliser asymptotiquement le système par cette méthode.