



Examen – Automatique

Session 1, mardi 10 décembre 2019

Durée : 1h30

1 Introduction

- Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite.
- Un corrigé sera mis sous Moodle.

2 Exercices

▷ **Exercice 1.** (3 point) On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

1.1. Donner la fonction f (en précisant bien son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée) permettant d'écrire ce système contrôlé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

1.2. Ce système est-il un système linéaire? Si oui on donnera les matrices A et B définissant ce système linéaire.

1.3. Le système est-il contrôlable?

▷ **Exercice 2.** (8 points)

On considère le circuit avec une diode à effet tunnel de la figure 1 où la diode à effet tunnel est caractérisée par la relation $i_R = h(v_R)$ où h est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

On note $x_1 = v_C$ et $x_2 = i_L$ les variables d'état et $u = E$ le contrôle. On peut alors écrire le modèle du système par

$$(S) \begin{cases} C\dot{x}_1(t) = -h(x_1(t)) + x_2(t) \\ L\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - Rx_2(t) + u(t) \end{cases}$$

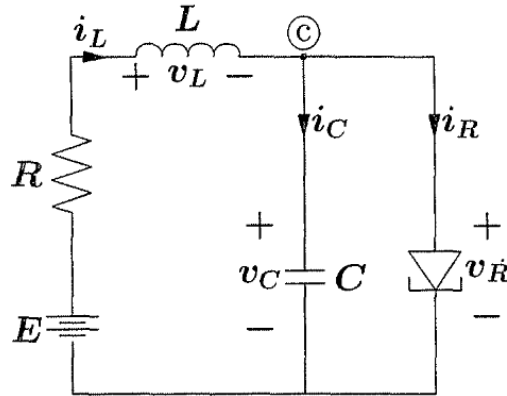


FIGURE 1 – Circuit avec une diode à effet tunnel

- 2.1. Donner la fonction f (en précisant bien son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée) permettant d'écrire ce système contrôlé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- 2.2. Que doit vérifier la fonction h pour que le système soit linéaire.
- 2.3. Donnez les équations que doivent vérifier les points de fonctionnement
- 2.4. En vous aidant de la figure 2

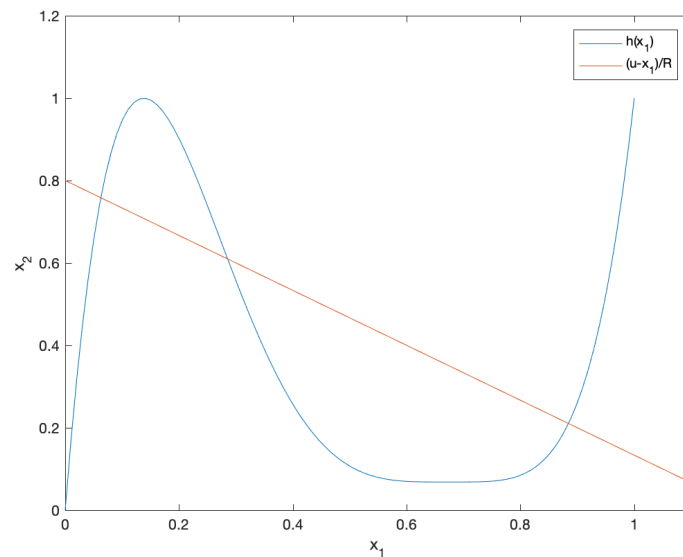


FIGURE 2 – Fonction $h(x_1)$ et $(u - x_1)/R$ pour $R = 1.5$ et $u = 1.2V$

1. Dites pour $u = 1.2V$ combien il y a de points de fonctionnement et donnez une estimation des coordonnées de ces points.
2. Dites suivant les valeurs de u_e combien on a de point de fonctionnement. Vous justifierez votre réponse.

2.5. La figure 3 donne le diagramme de phase dans le cas où $u(t) = 1.2V$ pour tout t . Au vu de ce graphique pouvez-vous dire parmi les points $Q1$, $Q2$ et $Q3$ lesquels sont asymptotiquement stables, stables ou instables. Vous justifierez votre réponse.

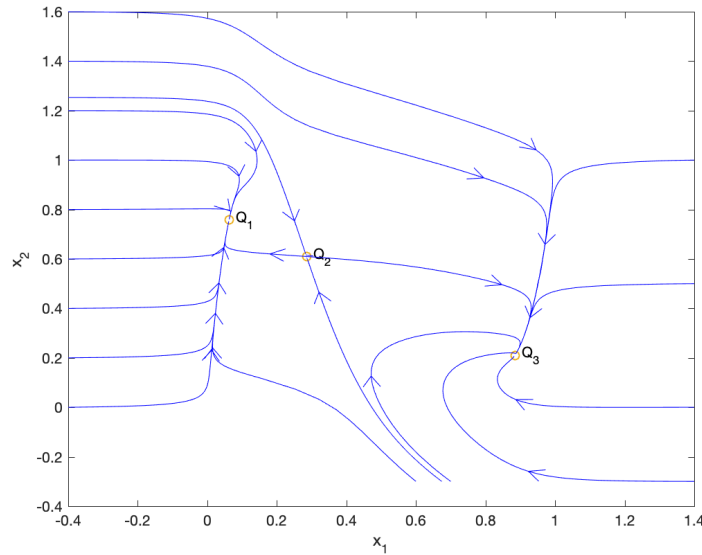


FIGURE 3 – Diagramme de phase pour $u(t) = 1.2V$ et $R = 1.5k\Omega$.

▷ **Exercice 3.** (7 points) On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_3(t) - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

3.1. Donner la fonction f (en précisant bien son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée) permettant d'écrire ce système contrôlé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

3.2. Ce système est-il un système linéaire ? Si oui on donnera les matrices A et B définissant ce système linéaire.

3.3. Donner ses points de fonctionnement.

3.4. On considère un point de fonctionnement (x_e, u_e) et un contrôle par retour d'état $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Quelle est la dimension de K ?
2. On pose $g(x) = f(x, u_e + K(x - x_e))$. Calculer $J_g(x_e)$ la matrice jacobienne de g au point x_e .
3. que doit vérifier cette matrice pour que le système contrôlé par ce retour d'état soit asymptotiquement stable ?
4. Pour $(x_e, u_e) = (-1, -1, 0, -1)$, est-il possible de trouver K afin d'avoir cette propriété ?