

Automatique

Département Sciences du numérique

Informatique, Mathématiques Appliquées, Réseaux, Télécommunications

TD 4



21 septembre 2023

▷ **Exercice 1.** On considère un point de fonctionnement (x_e, u_e) d'un système contrôlé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ où $x(t) \in \mathbf{R}^n$ et $u(t) \in \mathbf{R}^m$ et un contrôle par retour d'état : $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1.1. Écrire l'équation différentielle $\dot{x}(t) = g(x(t))$ dont est solution l'état $x(t)$ (on donnera l'application g), et vérifier que x_e est un point d'équilibre de cette équation différentielle.

1.2. Donner l'expression de $J_g(x_e)$ en fonction des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) \text{ et de la matrice } K.$$

1.3. Si le système de départ s'écrit $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, qu'obtient-on ?

▷ **Exercice 2.** On considère l'équation différentielle suivante

$$\dot{q}(t) = p(t) \tag{1}$$

$$\dot{p}(t) = -q(t), \tag{2}$$

et on note $x(t) = (q(t), p(t))$.

2.1. On pose

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \|x\|^2. \end{aligned}$$

Montrer que le long de toutes solutions de l'équation différentielle $x(t)$, $V(x(t))$ est constant.

2.2. Écrire le schéma d'Euler explicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = (1 + h^2)\|x_0\|^2$.

2.3. On appelle le schéma d'Euler implicite le schéma $x_1 = x_0 + \varphi(t_1, x_1)$. Écrire le schéma d'Euler implicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = \frac{1}{(1+h^2)}\|x_0\|^2$.

2.4. On considère maintenant le schéma d'Euler symplectique de type A. C'est-à-dire le schéma défini par :

— Un pas d'Euler implicite sur la première équation (1) ;

— Un pas d'Euler explicite sur la deuxième équation (2) ;

Montrer que dans ce cas x_0 et x_1 appartiennent à la même ellipse d'équation $p^2 + q^2 - hpq = \text{cte}$.

2.5. Quels commentaires pouvez-vous faire sur ces deux exercices ?