



TD3, Automatique

Objectifs

Le but de ce TD est d'apprendre à stabiliser des systèmes linéaires et non linéaires par retour d'état.

Le dernier exercice est une introduction à la notion de fonction de Liapounov qui permet de montrer la stabilité de systèmes non linéaires autour d'un point d'équilibre non hyperbolique.

▷ **Exercice 1.** On considère le système linéaire suivant

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

1.1. Écrire le système sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t).$$

1.2. Donner les points de fonctionnement, c'est-à-dire tels que $f(x_e, u_e) = 0$.

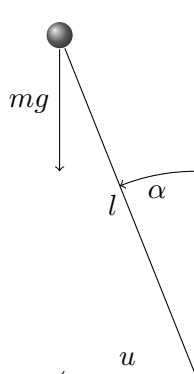
1.3. Le système est-il contrôlable ?

1.4. On considère le point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$.

1. On considère un contrôle par retour d'état $u(t) = Kx(t)$. Quels valeurs doivent avoir les coefficients k_1 et k_2 de K pour que x_e soit un point d'équilibre asymptotiquement stable, pour le système $\dot{x}(t) = f(x(t), Kx(t))$, avec comme unique valeur propre¹ -1 .
2. On suppose maintenant que l'on a accès en sortie qu'à la première composante de l'état : $y(t) = x_1(t)$ et on considère un contrôle par retour de sortie $u(t) = ky(t)$. Peut-on trouver des valeurs de k pour que, pour le nouveau système, x_e soit asymptotiquement stable, stable ?

▷ **Exercice 2.** La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule est l'accélération du déplacement que l'on peut exercer horizontalement.

1. Si on passe dans le mode fréquentiel en utilisant la transformée de Laplace, les valeurs propres sont exactement les pôles de la fonction de transfert.

FIGURE 1 – *Pendule inversé contrôlé, version 1.*

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))u(t)}{l} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

2.1. L'origine est-elle stable, asymptotiquement stable, pour le système non contrôlé ?

2.2. 1. Déterminer les points de fonctionnement du système.

2. Donner les conditions sur K pour que le contrôle par retour d'état $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$ stabilise asymptotiquement le système en un point de fonctionnement tel que $\cos x_{e,1} > 0$.

2.3. On se place ici autour du point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$. On suppose maintenant que l'on a accès en pratique qu'à la valeur de sortie $y(t) = x_1(t) = \alpha(t)$ et on considère le contrôle par retour de sortie $u(t) = ky(t)$.

1. Peut-on par la méthode précédente obtenir un contrôle qui stabilise le système ?
2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{g+k}{l}(\cos x_1 - 1) + \frac{kx_1}{l} \sin x_1 + \frac{x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

- (a) Donner une relation entre g et k pour qu'il existe $B(0, \eta)$ sur laquelle $V(x) > 0$ si $x \neq 0$.
- (b) Si $x(\cdot)$ est une solution du système montrer que $\frac{d}{dt}(V(x(t))) = 0$.
- (c) En déduire que le point $(0, 0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable, mais qu'il est stable.