



Examen – Automatique

Session 1, lundi 15 novembre 2021

Durée : 1h30

1 Information, Consignes

- Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite ;
- Un corrigé sera accessible sous le `git` dans la journée.

▷ **Exercice 1.** (9 points) Soit α une constante réelle fixée. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \alpha x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

1.1. Écrire ce système sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. On donnera les matrices A et B

1.2. Pour quelles valeurs de α le système est-il contrôlable ?

1.3. donner les points de fonctionnement de (S) lorsque $\alpha \neq 1$?

1.4. On considère un contrôle par retour d'état autour d'un point de fonctionnement $(x_e, u_e) : u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Quels sont les dimensions de la matrice K .
2. Calculer $A + BK$.
3. Que doit vérifier la matrice $A + BK$ pour que l'on contrôle asymptotiquement le système autour du point de fonctionnement.
4. On considère maintenant le cas $\alpha = 1$ et on suppose que l'on a un point de fonctionnement (x_e, u_e) . Peut-on trouver des coefficients afin que le retour d'état stabilise asymptotiquement le système autour de ce point de fonctionnement ?

▷ **Exercice 2.** (7 points)

On considère le modèle de pêche suivant

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t)(1 - \frac{x(t)}{b}) - ax(t)u(t) \end{cases}$$

où r, b et a sont des constantes strictement positives, $x(t)$ représente la biomasse totale et $u(t)$ le taux de pêche.

2.1. Donner la fonction f permettant d'écrire l'équation différentielle sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Le système est-il linéaire. Si oui, on donnera les matrices A et B .

2.2. Donner les points de fonctionnement (x_e, u_e) de ce système.

2.3. On considère un contrôle par retour d'état autour d'un point de fonctionnement $(x_e, u_e) : u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. Quels sont les dimensions de la matrice K .
2. Donner la condition sur K pour que l'on contrôle asymptotiquement le système autour du point de fonctionnement.
3. Avec une valeur de K qui vérifie la condition ci-dessus, et partant d'un point très éloigné du point de fonctionnement, que peut-on dire de la limite de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

▷ **Exercice 3.** (4 points) Soit $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$. On rappelle les schémas d'Euler explicite et implicite à pas constant $h = (t_f - t_0)/N$ pour résoudre un problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Euler explicite

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i).$$

Euler implicite

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}).$$

On considère le système suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{q}(t) = p(t) \\ \dot{p}(t) = -q(t) \\ q(0) = q_0 \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

On note $x = (q, p)$.

3.1. Écrire ce que donne le schéma d'Euler explicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = (1 + h^2)\|x_0\|^2$.

3.2. Écrire ce que donne le schéma d'Euler implicite sur cet exemple et montrer que $\|x_1\|^2 = \frac{1}{(1+h^2)}\|x_0\|^2$.

3.3. Quels commentaires pouvez-vous faire ?