



Examen – Automatique

Session 1, mardi 11 décembre 2018

Documents autorisés : 1 pages A4
recto-verso manuscrite

Durée : 1h30

- ▷ **Exercice 1.** (3 points) On donne aux figures 1 et 2 les résultats de 2 simulations du TP2 du contrôle du pendule inversé par retour d'état.

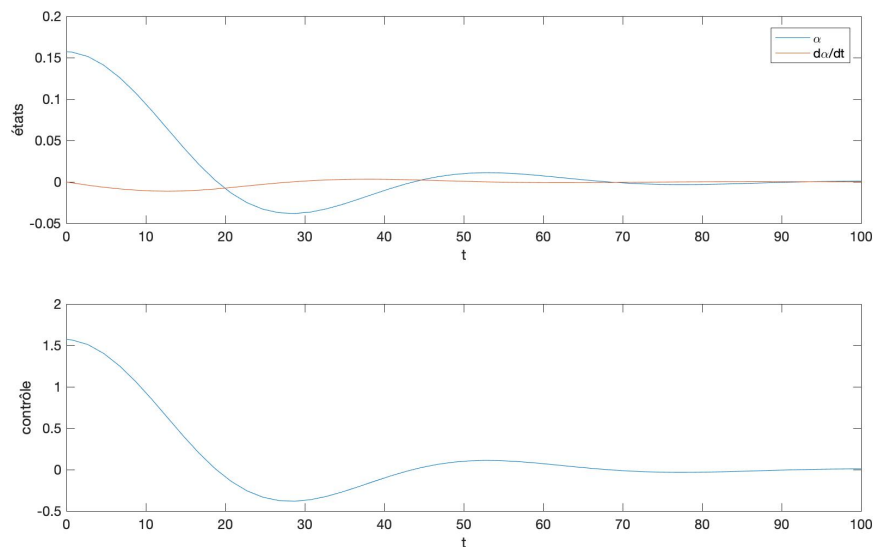


FIGURE 1 – *Solution calculée avec ODE45, $x_0 = (\pi/20, 0)$, $t_f = 100$, $K = (10, 1)$, options standard de SIMULINK.*

1.1. Dîtes, à partir de ces graphiques et en justifiant votre réponse, dans quels cas on a, a priori, la stabilité asymptotiquement du pendule inversé.

1.2. Pour les 2 cas on a la même valeur de la matrice K intervenant dans

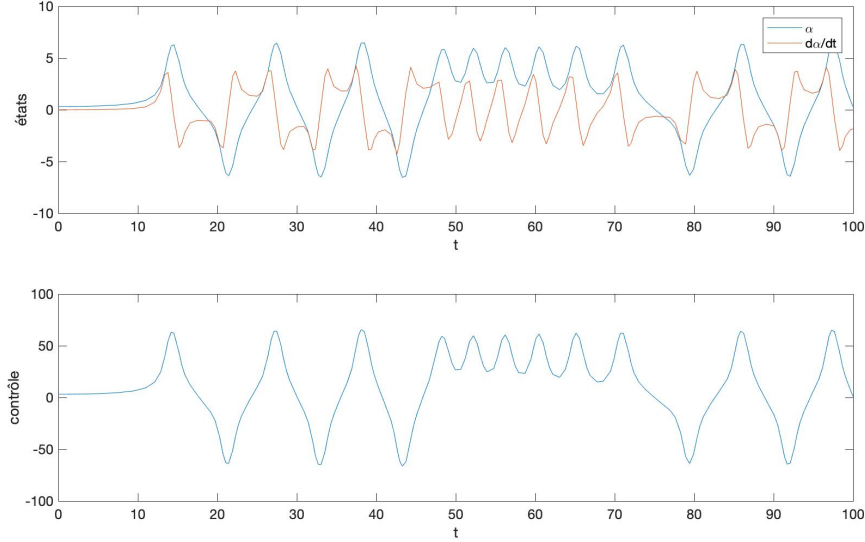


FIGURE 2 – *Solution calculée avec ODE45, $x_0 = (\pi/10, 0)$, $t_f = 100$, $K = (10, 1)$, options standard de SIMULINK.*

le calcul du contrôle par retour d'état. Expliquer pourquoi nous n'avons pas la stabilisation asymptotique dans les 2 cas.

▷ **Exercice 2.** (7 points) On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t) - x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases}$$

2.1. Écrire ce système sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t))$. On donnera la fonction f avec ces ensembles de départ et d'arrivée.

2.2. Ce système est-il un système linéaire ?

2.3. Donner ses points d'équilibre ?

2.4. À partir du calcul de la matrice jacobienne aux points d'équilibre que pouvez-vous conclure quant-à la stabilité de ces points d'équilibres.

▷ **Exercice 3.** ¹(10 points) On considère le vérin pneumatique avec ressort de rappel représenté sur la figure 3. Un tel vérin est souvent qualifié de simple effet car l'air sous pression n'existe que dans une des deux chambres. Ce type de vérin est d'usage courant en robotique pour bouger les éléments mécaniques. Les paramètres de ce système sont la raideur du ressort k , la

1. Proviens du cours de l'ENSTA-Bretagne

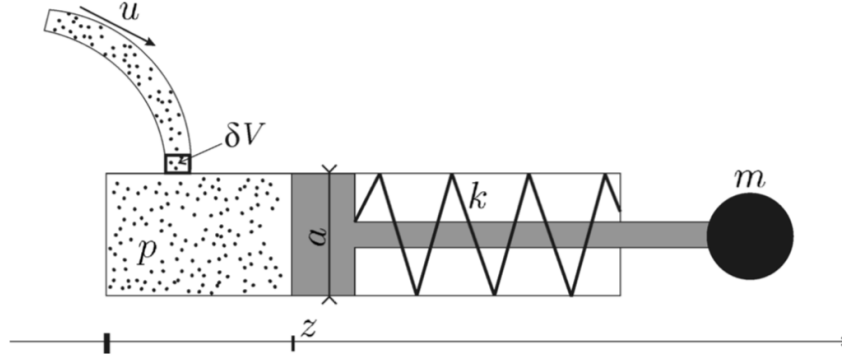


FIGURE 3 – Vérin simple effet.

surface du piston a et la masse m en bout de piston (les masses de tous les autres objets sont négligées). Le contrôle du système est le débit volumique u d'air vers la chambre du vérin.

Les équation qui régissent ce système s'écrivent alors

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{ax_3(t) - kx_1(t)}{m} \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{x_3(t)}{x_1(t)} \left(x_2(t) - \frac{u(t)}{a} \right). \end{cases}$$

On supposera que $x_1(t)$ sera toujours strictement positif.

3.1. Donner la fonction f qui permet d'écrire le système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

3.2. Donner les points de fonctionnement (x_e, u_e) de ce système.

3.3. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e).$$

3.4. On considère un contrôle par retour d'état $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

1. De quelles dimensions est K ?
2. Donner les équations que doivent vérifier les coefficients de K afin de stabiliser asymptotiquement le système autour du point de fonctionnement avec des valeurs propres de $-1, -2$ et -3 ?