



Département Sciences du Numérique

Automatique

Systeme commandé

0. Cots et J. Gergaud

23 septembre 2023

Table des matières

1	Introduction	1
I	Exemples	1
II	Définitions	3
III	Questions	5
2	Stabilité des systèmes dynamiques	7
I	Introduction	7
II	Cas des équations différentielles linéaires homogènes et autonomes	7
II.1	Introduction	7
II.2	Approche élémentaire	7
II.3	Exponentielle de matrice	8
III	Équations différentielles linéaires avec second membre	10
IV	Équations différentielles ordinaires non linéaires	10
IV.1	Qu'est-ce qu'une solution ?	10
IV.2	Existence de solution	11
V	Stabilité	11
V.1	Définitions	11
V.2	Cas d'une edo linéaire et autonome	12
V.3	Stabilité par la linéarisation	12
3	Commande des systèmes	15
I	Introduction	15
II	Contrôlabilité	16
III	Stabilisation par retour d'état	18
III.1	Introduction	18
III.2	Cas d'un système linéaire et autonome	18
III.3	Cas non linéaire	19

Chapitre 1

Introduction

I Exemples

Exemple I.1 (Pendule simple contrôlé, version 1)

On considère le pendule de la figure 1.1 contrôlé par un couple moteur $u(t)$. Les principes physiques de la mécanique classique donnent comme équation qui régit l'évolution du mouvement

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + mlg\sin(\alpha(t)) = u(t),$$

où $\ddot{\alpha}(t)$ désigne la dérivée seconde de l'angle α par rapport au temps t .

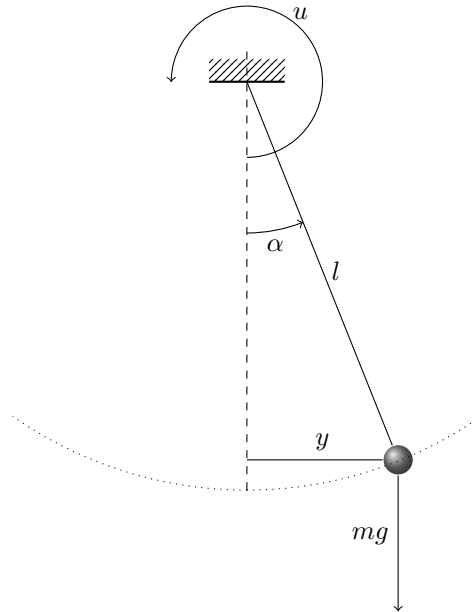


FIGURE 1.1 – Pendule simple contrôlé.

On prend ici comme variable d'état qui décrit le système $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$. Le système différentiel du premier ordre que l'on obtient s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(z_1) + \frac{v}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut en pratique avoir accès à différentes variables de sortie (mesurées) :

- $y(t) = \alpha(t) = x_1(t)$;
- $y(t) = x(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$;
- $y(t) = l \sin(\alpha(t)) =$ la distance entre la masse et l'axe des ordonnées.

On écrira ces variables de sortie sous la forme $y(t) = g(x(t), u(t))$.

Exemple I.2 (Pendule simple contrôlé, version 2)

En pratique il y a des frottements. Une meilleure modélisation du système est donc

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + k\dot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t).$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

L'application f s'écrit alors

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{k}{ml^2}z_2 - \frac{g}{l} \sin(z_1) + \frac{v}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple I.3 (Pendule inversé contrôlé, version 1)

La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule n'est plus le couple d'un moteur, mais la force de déplacement que l'on peut exercer horizontalement.

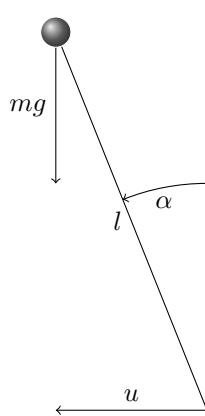


FIGURE 1.2 – Pendule inversé contrôlé, version 1.

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{u(t)}{l^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0. \end{cases}$$

L'application f s'écrit alors

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{g}{l} \sin(z_1) - \frac{v}{l^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention. Dans toute la suite de ce cours, afin de ne pas surcharger les notations et en cohérence avec les notations habituelles, on notera les arguments de la fonction f , x et u . Dans cet exemple on écrira donc l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ et la fonction f

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{u}{l^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il ne faut donc pas confondre les fonctions x et u dans l'écriture $f(x(t), u(t))$ et les variables $x \in \mathbf{R}^2$ et $u \in \mathbf{R}$ dans la définition de f ci-dessus. C'est le contexte qui fera la différence. Si l'on désire clairement désigner la fonction du temps x on écrira $x(\cdot)$.

Exemple I.4 (Robot Lego segway)

Nous décrivons ici le modèle du Robot Lego qui sera utilisé en TP.

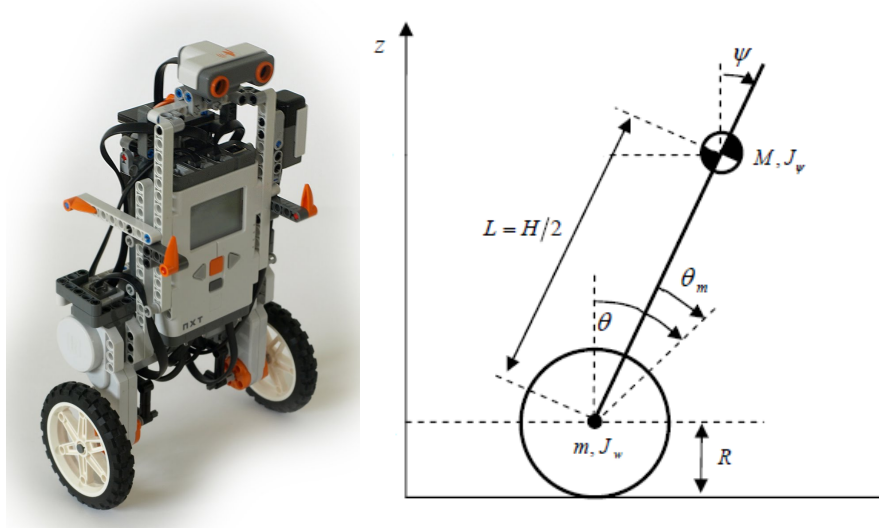


FIGURE 1.3 – Robot Lego segway.

Voici d'autres exemples plus complexes :

- pilote automatique d'un avion ;
- contrôle des gouvernes d'un avion ;
- contrôle de freinage ABS ;
- contrôle de vol d'un drone ;
- pompe à insuline.
- ...

II Définitions

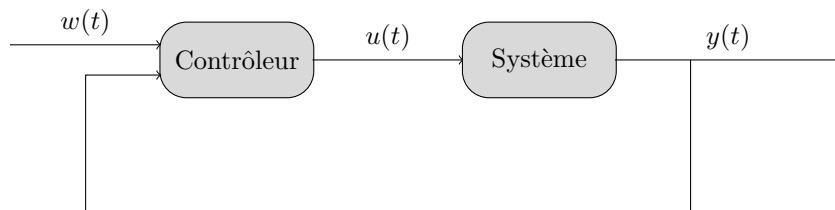


FIGURE 1.4 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée.

Définition II.1 (État) L'état du système est caractérisé par des variables dynamiques (des fonctions en terme mathématiques) appelées des variables d'états : $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n$.

Nous ne considérerons dans ce cours que le cas où l'évolution en temps du système est régie par une équation différentielle ordinaire

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition II.2 (Contrôle) On appelle contrôle, ou commande ou variable en entrée la fonction $u(\cdot)$ qui permet d'agir sur le système.

Définition II.3 (Variables de sortie) Les variables de sortie sont les variables accessibles (en pratique grâce à des mesures) à la sortie du système.

Définition II.4 (Consigne) On appelle consigne, et on note $w(t)$ un objectif à attendre. C'est par exemple atteindre un état d'équilibre du système.

Définition II.5 On appelle équation d'état, l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ et équation de sortie l'équation $y(t) = g(t, x(t), u(t))$.

Remarque II.6

(i)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (t, x, u) &\longmapsto f(t, x, u). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^p \\ (t, x, u) &\longmapsto g(t, x, u). \end{aligned}$$

(iii) Très souvent les fonctions f et g ne dépendent pas de t . On dit alors que le système est autonome. On supprimera alors l'argument t dans les fonctions f et g .

(iv) Très souvent aussi on aura $t_0 = 0$.

Nous serons toujours dans la suite de ce cours dans le cas autonome et avec $t_0 = 0$.

Remarque II.7

Nous étudions ici les systèmes de commande en boucle fermée 1.6, dit aussi de commande à contre-réaction¹. Il y a d'autres systèmes de commande dit en boucle ouverte donnés par le schéma de la figure 1.5. On peut par exemple rechercher la loi de commande (la poussée d'un moteur) d'un satellite pour réaliser un transfert d'orbite.

"les limitations de ce type de loi de commande sont cependant assez évidentes : la moindre erreur sur les données (la condition initiale par exemple) ne pourra être prise en compte. Par exemple une commande en boucle ouverte sur une voiture donnerait ceci : pour suivre une ligne droite, positionnez vos roues dans l'axe, tenez bien votre volant, et fermez les yeux ...[2] "

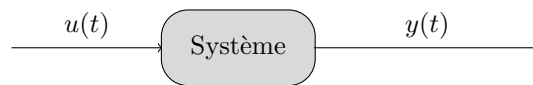


FIGURE 1.5 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle ouverte.

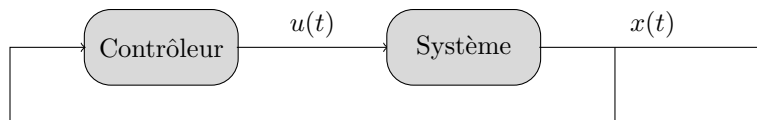


FIGURE 1.6 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée.

Remarque II.8

La réalité est bien sur plus complexe, il y a des perturbations, on accède aux données de sortie $y(t)$ par des mesures. Un schéma fonctionnel plus réaliste est le schéma de la figure 1.7 où $d(t)$ est une perturbation extérieure du système.

1. feedback en anglais

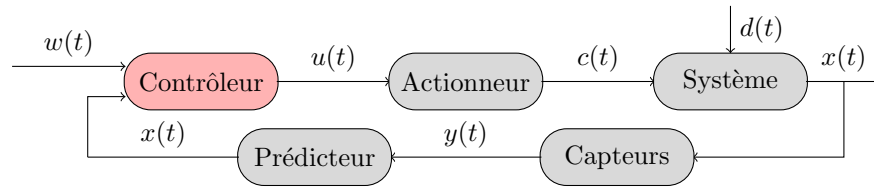


FIGURE 1.7 – Schéma fonctionnel complet d'un système en boucle fermée.

III Questions

Si on a $f(x_e, u_e) = 0$, alors en prenant $x(0) = x_e$ et $u(t) = u_e$ pour tout t , l'état est $x(t) = x_e$ pour tout t . D'où la

Définition III.1 (Point de fonctionnement) On appelle point de fonctionnement d'un système contrôlé un point (x_e, u_e) tel que $f(x_e, u_e) = 0$.

Définition III.2 (Point d'équilibre) On appelle point d'équilibre un point de fonctionnement où le contrôle est nul : $f(x_e, 0) = 0$.

Exemple III.3

Pour le pendule simple on a pour $u_e = 0$ deux points de fonctionnement : $x_0 = (0, 0)$ et $x_e = (\pi, 0)$.

Une fois le modèle bien défini, plusieurs questions se posent :

- Sur l'analyse et le comportement dynamique du système
 - Commandabilité ou contrôlabilité du système. Existe-t-il un contrôle $u(\cdot)$ qui amène le système d'un état initial donné $x(0)$ à un état final x_f en un temps $t = t_f$ fixé ?
 - Observabilité. Connaissant la variable de sortie $y(t)$ et le contrôle $u(t)$ pour tout $t \in [0, \tau[$, peut-on déterminer l'état $x(t)$ pour tout $t \in [0, \tau_u[$, ou de manière équivalente $x(0)$.
- Sur la synthèse des lois de contrôle
 - Planification de trajectoires. Si le système est contrôlable, comment trouver un contrôle qui amène l'état de $x(0)$ à x_f en un temps t_f fixé ?
 - Stabilisation. Comment construire un contrôle qui stabilise asymptotiquement le système autour d'un point d'équilibre x_e , c'est-à-dire tel que, pour toute condition initiale $x(0)$, on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e?$$

- Synthèse d'observateurs. En cas de réponse positive à la question de l'observabilité, comment déterminer l'état $x(\cdot)$ à partir de la connaissance de $y(\cdot)$ et de $u(\cdot)$?
- **Contrôle optimal.** Trouver le meilleur contrôle qui amène l'état de $x(0)$ à x_f en un temps t_f fixé ou libre.

Chapitre 2

Stabilité des systèmes dynamiques

I Introduction

Ce chapitre est très fortement inspiré des ouvrages [1, 2].

On s'intéresse dans ce chapitre à la stabilité autour d'un point d'équilibre d'un système dynamique autonome (équation différentielle ordinaire autonome)

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Définition I.1 (Point d'équilibre) On appelle point d'équilibre tout point x_e de \mathbf{R}^n qui vérifie $f(x_e) = 0$.

Si $x_0 = x_e$ alors on a trivialement comme solution $x(t) = x_e$ pour tout t .

La question est ici de savoir s'il s'agit d'un point d'équilibre stable ou instable, c'est-à-dire de savoir si lorsque l'on s'écarte de ce point d'équilibre, on y revient ou on s'en écarte. Par exemple pour le pendule simple non contrôlé $(0, 0)$ est un point d'équilibre stable, alors que $(\pi, 0)$ est un point d'équilibre instable.

II Cas des équations différentielles linéaires homogènes et autonomes

II.1 Introduction

On s'intéresse dans cette sous section à la solution du problème à valeur initiale

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont les éléments de $\ker A$. Si A est inversible, il n'y a qu'un seul point d'équilibre $x_e = 0$.

II.2 Approche élémentaire

Exemple II.1

On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire scalaire

$$(IVP1) \begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où λ est un réel et x est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On sait que la solution de cette équation, qui est unique, est donnée par

$$x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} x_0.$$

On en déduit que cette solution est définie sur $I = \mathbf{R}$ et que l'on a comme comportement asymptotique

- Si $\lambda < 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$;
- Si $\lambda = 0$ alors $x(t) = x_0$;
- Si $\lambda > 0$
 - Si $x_0 < 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$;
 - Si $x_0 = 0$ alors $x(t) = 0$;
 - Si $x_0 > 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

Exemple II.2

Considérons maintenant un système de deux équations différentielles

$$(IVP2) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ x_1(t_0) = x_{0,1} \\ x_2(t_0) = x_{0,2}. \end{cases}$$

La solution est alors donnée par

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda_1(t-t_0)} x_{0,1} \\ x_2(t) = e^{\lambda_2(t-t_0)} x_{0,2}. \end{cases}$$

et le comportement asymptotique est

- si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$;
- si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ et $x_{0,2} \neq 0$ alors $|x_1(t)| \rightarrow 0$ et $|x_2(t)| \rightarrow +\infty$, et donc $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$, quand $t \rightarrow +\infty$;
- ...

Exemple II.3

Si maintenant nous considérons le cas du système différentiel

$$(IVP3) \begin{cases} \dot{x}(t) = \Lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La solution est alors

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} x_{0,1} \\ \vdots \\ e^{(t-t_0)\lambda_n} x_{0,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{(t-t_0)\lambda_n} \end{pmatrix} x_0 = e^{(t-t_0)\Lambda} x_0.$$

Remarque II.4

La notation $e^{(t-t_0)\Lambda}$ sera clair au paragraphe suivant.

Le comportement asymptotique est alors

- si tous les λ_i sont strictement négatifs alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$;
- si tous les λ_i sont négatifs ou nuls alors la solution est bornée quand $t \rightarrow +\infty$;
- si au moins un λ_i est strictement positif et que $x_{0,i} \neq 0$ alors $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$, quand $t \rightarrow +\infty$.

Exemple II.5

Soient maintenant A une matrice diagonalisable, $A = P\Lambda P^{-1}$ et le système différentiel à valeur initiale

$$(IVP4) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Posons $z(t) = P^{-1}x(t)$, alors $z(t)$ est solution du système différentielle à valeur initiale

$$(IVP5) \begin{cases} \dot{z}(t) = P^{-1}\dot{x}(t) = P^{-1}P\Lambda P^{-1}x(t) = \Lambda z(t) \\ z(t_0) = P^{-1}x_0. \end{cases}$$

On a donc $z(t) = e^{(t-t_0)\Lambda} P^{-1}x_0$ et $x(t) = Pz(t) = (Pe^{(t-t_0)\Lambda} P^{-1})x_0$. Par suite le comportement asymptotique est caractérisé par les valeurs propres de la matrice A .

II.3 Exponentielle de matrice

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|)$, est un espace de Banach. On considère ici une norme qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est alors normalement convergente (cf. Annexe ??) car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

On peut donc donner la

Définition II.6 (Exponentielle de matrice) On appelle exponentiel de matrice l'application

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A &\longmapsto \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned}$$

Théorème II.7

L'exponentielle de matrice a les propriétés suivantes :

- (i) $e^0 = I$;
- (ii) si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

- (iii) si P est inversible on a

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}; \quad (2.2)$$

- (iv) si A et B sont deux matrices qui commutent alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B); \quad (2.3)$$

- (v) pour tout α et β , $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$;

- (vi) pour toute matrice A , e^A est inversible et

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A); \quad (2.4)$$

- (vii) pour toute matrice A , l'application $t \rightarrow e^{tA}$ est C^∞ et

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A. \quad (2.5)$$

Exemple II.8

On considère le cas $n = 2$ et on suppose que A est diagonalisable dans \mathbf{C} mais pas dans \mathbf{R} . Les valeurs propres complexes de A sont donc $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. On peut toujours supposer que $\beta > 0$. Si $v = v_1 + iv_2$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors $\bar{v} = v_1 - iv_2$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$. On en déduit alors immédiatement que v_1, v_2 est une base de \mathbf{C}^2 et donc aussi une base de \mathbf{R}^2 . Soit P la matrice de passage de la base canonique de \mathbf{R}^2 à cette base (v_1, v_2) . Comme

$$Av = \lambda v = A(v_1 + iv_2) = Av_1 + iAv_2 = (\alpha + i\beta)(v_1 + iv_2).$$

Par suite

$$A = PBP^{-1} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dans cette base le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ s'écrit donc $\dot{z}(t) = Bz(t)$. Mais

$$tB = t\alpha I + t\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = t\alpha I + t\beta C$$

Les matrices $t\alpha I$ et $t\beta C$ commutent, par suite

$$\exp(tB) = e^{\alpha t} \exp\left(t\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Mais

$$\exp\left(t\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta^2 t^2}{2} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \dots & \beta t - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

En conclusion

$$z(t) = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} z_0.$$

Par suite

— Si $\alpha < 0$ alors $z(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$;

- Si $\alpha = 0$ $z(t)$ est borné ;
- Si $\alpha > 0$ et $z_0 \neq 0$ alors $\|z(t)\| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exemple II.9

On considère le cas $n = 2$ et on suppose que A n'est pas diagonalisable dans \mathbf{C} . Alors l'unique valeur propre λ est réel, le sous espace propre est de dimension 1 et A est semblable à la matrice (décomposition de Jordan)

$$J \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

et dans cette base le système différentielle s'écrit $\dot{z}(t) = Jz(t)$. Mais

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les matrices commutent et la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Par conséquent on a immédiatement

$$z(t) = e^{\lambda t} \left(I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) z_0.$$

Une nouvelle fois donc, si $\lambda < 0$ alors $z(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$;

III Équations différentielles linéaires avec second membre

On s'intéresse ici aux équations différentielles linéaires à condition initiale de la forme

$$(IVP)_6 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et où la fonction $b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est supposée de classe $C^k, k \geq 0$. La solution est donnée par

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds. \quad (2.6)$$

IV Équations différentielles ordinaires non linéaires

On considère l'équation autonome suivante

$$(IVP)_7 \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} f : \Omega \in \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

Ω ouvert.

IV.1 Qu'est-ce qu'une solution ?

La première question qui se pose est de savoir ce que l'on entend par une solution de $(IVP)_7$.

Définition IV.1 (Définition classique) On suppose f continue. On appelle solution classique de $(IVP)_7$ tout couple (I, x) , I intervalle ouvert de \mathbf{R} , contenant t_0 et $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ dérivable en tout point et vérifiant

- (i) $x(t) \in \Omega, \forall t \in I$
- (ii) $\dot{x}(t) = f(x(t)), \forall t \in I$
- (iii) $x(t_0) = x_0$.

Une solution est aussi appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

Remarque IV.2

Si f est continue (respectivement C^k) et (I, x) est une solution alors x est C^1 (respectivement C^{k+1}).

IV.2 Existence de solution

Définition IV.3 (Fonction localement lipschitzienne) L'application $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, Ω ouvert, est localement lipschitzienne par rapport à la variable x si et seulement si pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et une constante $k \geq 0$ tels que

$$\forall x_1 \in V, \forall x_2 \in V, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Théorème IV.4

Si f est différentiable par rapport à x et si l'application

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \\ x &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x) \end{aligned}$$

est continue alors f est localement lipschitzienne.

Théorème IV.5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, Ω ouvert de \mathbf{R}^n , f continue et localement lipschitzienne par rapport à x alors pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une unique solution locale au problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque IV.6

On entend par unicité de solution le fait que si on a deux solutions (I_1, x_1) et (I_2, x_2) , alors ces solutions coïncident sur $I_1 \cap I_2$. On peut donc définir la solution maximale. Cette solution est définie sur un intervalle $]t_-(x_0), t_+(x_0)[$.

Démonstration

Voir le cours d'équations différentielles ordinaires [3]. \square

Définition IV.7 (Flot) On appelle flot de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t))$, l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{O} &\longrightarrow \Omega \\ (t, x_0) &\longmapsto \phi(t, x_0) \end{aligned}$$

où $\phi(t, x_0)$ désigne la solution au temps t du problème de Cauchy (IVP) et \mathcal{O} est l'ouvert

$$\mathcal{O} = \{(t, x_0), t \in]t_-(x_0), t_+(x_0)[\}.$$

V Stabilité

V.1 Définitions

Définition V.1 Nous dirons qu'un équilibre x_e est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \quad \text{et} \quad t > 0 \Rightarrow \|\phi(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon.$$

Ainsi, toute solution proche de x_e en reste proche.

Remarque V.2

Toute solution dont la condition initiale est dans une boule $B(x_e, \delta)$ reste dans la boule $B(x_e, \varepsilon)$, et donc dans un compact de Ω , pour $t > 0$ (on suppose ε suffisamment petit pour que $B_f(x_e, \varepsilon) \in \Omega$).

Définition V.3 Nous dirons qu'un équilibre x_e est asymptotiquement stable si il est stable et si il existe un voisinage V de x_e tel que, pour tout $x_0 \in V$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = x_e.$$

Dans ce cas toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui. Notons que le fait que toute solution issue d'un voisinage V converge vers x_e n'implique pas la stabilité de cet équilibre : il existe des systèmes possédant un équilibre non stable x_e mais dont toutes les trajectoires convergent vers x_e .

Remarque V.4

En automatique, on appelle souvent points d'équilibre stable les points d'équilibre asymptotiquement stable !

V.2 Cas d'une edo linéaire et autonome

Théorème V.5

- (i) L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.
- (ii) Si A possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un point d'équilibre stable de $\dot{x}(t) = Ax(t)$.
- (iii) L'origine est un point d'équilibre stable de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur propre de partie réelle nulle, les multiplicités algébriques et géométrique coïncident.

Dans le cas $n = 2$ la visualisation de ces résultats se trouve au paragraphe plan de phase dans le cas $n = 2$.

Remarque V.6

Considérons le cas d'une équation différentielle affine et autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$ et x_e un point d'équilibre. Posons $y(t) = x(t) - x_e$, alors le système s'écrit en y , $\dot{y}(t) = Ay(t)$. Ainsi, la stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation affine $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$ sont équivalents respectivement à celles de l'origine pour l'équation linéaire $\dot{y}(t) = Ay(t)$.

V.3 Stabilité par la linéarisation

Pour les démonstrations des théorèmes voir [1, 2].

Théorème V.7

Soit x_e un point d'équilibre de $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Si toutes les valeurs propres de $f'(x_e)$ sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable.

Remarque V.8

La condition est une condition suffisante mais non nécessaire. Si on considère par exemple l'équation différentielle $\dot{x}(t) = -x^3(t)$ de point d'équilibre $x_e = 0$ on a $f'(x_e) = 0$. Ce point d'équilibre est cependant un point d'équilibre asymptotiquement stable car la solution pour une condition initiale $x_0 \neq 0$ s'écrit

$$x(t) = \frac{\text{sign}(x_0)}{\sqrt{2t + 1/x_0^2}}.$$

Théorème V.9

Si x_e est un point d'équilibre stable, alors toutes les valeurs propres de $f'(x_e)$ sont à partie réelle négative ou nulle.

Remarque V.10

La réciproque du théorème précédent est fausse. Considérons en effet les deux équations différentielles $\dot{x}(t) = f(x(t))$ et $\dot{x}(t) = g(x(t))$ avec

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Ces deux équations différentielles ont comme point d'équilibre $x_e = (0, 0)$ et

$$f'(x_e) = g'(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $f'(x_e)$ sont donc $\pm i$ qui ont une partie réelle nulle. Mais x_e est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour la première équation et instable pour la deuxième. En effet considérons la fonction ρ définie par $\rho(x) = x_1^2 + x_2^2$. Si $x(\cdot)$ est une solution de $\dot{x}(t) = f(x(t))$, alors

$$\frac{d\rho(x(\cdot))}{dt}(t) = -2\rho^2(x(t)).$$

Ainsi $\rho(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|^2$ est une fonction strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, on peut construire une suite $(\rho_n)_n = \rho(x(t_n))$ avec (t_n) strictement croissante, qui tends vers $+\infty$, telle que $(\rho_n)_n$ converge vers $\rho^* \geq 0$. Si $x^* \neq 0$ alors pour tout n , $0 < \rho(x^*) < \rho(x_n) = \rho(x(t_n)) = \rho(x_0) + \int_0^{t_n} -2\rho(x(s))^2 ds < \rho(x_0) + \int_0^{t_n} -2\rho(x^*)^2 ds = \rho(x_0) - 2\rho(x^*)^2 t_n$. Ce qui est impossible. On en déduit que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Si maintenant on considère une solution de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = g(x(t))$, on obtient par un même raisonnement $\|x(\cdot)\|^2$ strictement croissant, d'où le résultat.

Remarque V.11

En pratique on utilisera souvent la contraposée du théorème précédent : Si $f'(x_e)$ possède une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre x_e n'est pas stable.

Définition V.12 (point d'équilibre hyperbolique) Un point d'équilibre est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de $f'(x_e)$ sont à partie réelle non nulle.

Corollaire V.13

Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable, soit non stable.

Exemple V.14

Considérons le cas du pendule simple amorti non contrôlé.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0. \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont points qui vérifie $f(x) = 0$, soit

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -\frac{k}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à $x_e = (0, 0)$ ou $x_e = (\pi, 0)$. La matrice jacobienne de f en x est

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

On vérifie alors immédiatement que les valeurs propres de

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

sont à partie réelle strictement négatives. Par suite ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Par contre il y a toujours une valeur propre de

$$J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

qui est strictement positive. Donc le point d'équilibre haut est instable.

Remarque V.15

Le cas du pendule simple non amorti sans contrôle revient à poser $k = 0$. La conclusion est la même pour le point d'équilibre $(\pi, 0)$, mais l'étude des valeurs propres de la matrice jacobienne $J_f(0, 0)$ ne permet pas de conclure car les valeurs propres sont imaginaires pures et que f est non linéaire. Pour prouver la stabilité, il faut utiliser les fonctions de Liapounov.

Chapitre 3

Commande des systèmes

I Introduction

On s'intéresse ici à un système commandé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ où f est une fonction de $\Omega \times U$ à valeurs dans \mathbf{R}^n , Ω ouvert de \mathbf{R}^n et $U \subset \mathbf{R}^m$. Si on se donne une fonction $u : J \rightarrow U$, J intervalle ouvert contenant t_0 et que l'on note $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f_u(t, x(t))$, il n'y a aucune raison que f_u soit continue. Il nous faut donc redéfinir ici ce qu'on entend par solution de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Considérons donc le problème

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ceci fait appel à l'intégrale de Lebesgue (voir le cours d'intégration) et aux fonctions absolument continues.

Définition I.1 (Fonction absolument continue) Une fonction f de $I = [a, b]$, $a < b$ à valeurs dans \mathbf{R}^n est absolument continue sur I si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toutes familles d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 $([a_i, b_i])_{i=1, \dots, N}$, $a_i < b_i$, on a

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) \leq \eta \implies \sum_{i=1}^N \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème I.2

$f : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ est absolument continue si et seulement si f' existe presque partout, appartient à $L^1([a, b])$ et que l'on ait

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

L'intégrale est pris au sens de Lebesgue.

Définition I.3 Une fonction $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est localement absolument continue si elle est absolument continue sur tout intervalle compact de I .

Définition I.4 (Solution faible) On appelle solution faible de $(IVP)_1$ tout couple, s'il existe, (I, x) , $I \subset J$ intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant t_0 et $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ localement absolument continue vérifiant

- (i) $(t, x(t)) \in \Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $J \times \Omega$ ouvert, $\forall t \in I$
- (ii) $\dot{x}(t) = f_u(t, x(t))$, pour presque tout $t \in I$
- (iii) $x(t_0) = x_0$.

Remarque I.5

Si f_u est continue et (I, x) est une solution faible alors l'application $t \rightarrow f_u(t, x(t))$ est continue. Par suite la dérivée de $x(t)$ qui existe presque partout est égale à une fonction continue. Donc $\dot{x}(t)$ existe partout sur I et (I, x) est une solution classique.

Théorème I.6

(I, x) est une solution faible de (IVP) si et seulement si $(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout t dans I , la fonction $t \mapsto f_u(t, x(t))$ est localement intégrable et

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds.$$

Démonstration

— Si (I, x) est une solution faible, $x(\cdot)$ est absolument continue, alors (corollaire 2.41.5 de [5])

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds.$$

— Réciproque.

Si l'application $t \mapsto f_u(t, x(t))$ est dans L^1 et que l'on a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds,$$

alors (théorème 2.40.2 de [5]) $\dot{x}(t) = f_u(t, x(t))$ presque partout. Donc (I, x) est une solution faible.

□

Afin que les solutions du système différentiel soient bien définies, il nous faut donc, concernant le contrôle nous placer dans le bon espace fonctionnel qui est ici

$$\mathcal{U} = L^\infty([t_0, \tau], U),$$

l'espace des fonctions de $[t_0, \tau]$ à valeurs dans $U \subset \mathbf{R}^m$ essentiellement bornées, c'est-à-dire des fonctions vérifiant

$$\|u(\cdot)\|_\infty = \text{Supess}_{[t_0, \tau]} \|u(t)\| < +\infty.$$

Remarque I.7

Pour simplifier, on peut prendre les fonctions $u(\cdot)$ continues par morceaux.

On a alors le

Théorème I.8

Soit $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbf{R}^n, C^1, \Omega$ ouvert de $\mathbf{R}^n, U \subset \mathbf{R}^m, x_0 \in \Omega$. Alors pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, il existe une solution maximale unique au système différentiel à condition initiale

$$(IVP)_2 \begin{cases} \dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

définie sur $I = [t_0, \tau_u[$ ou $[t_0, \tau]$.

Démonstration

Voir le lemme 2.6.2 page 64 de [4] □

Remarque I.9

On prendra toujours ici l'instant initial $t_0 = 0$ et $I = [0, \tau_u[$ et on notera $x(\cdot, x_0, u(\cdot))$ la solution de $(IVP)_2$.

II Contrôlabilité

On considère dans cette section un système contrôlé linéaire et autonome avec $U = \mathbf{R}^m$ et on ne s'intéresse qu'à la relation entre l'entrée et l'état ($y(t) = x(t)$).

$$(\Sigma)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition II.1 Étant donné $x_0 \in \mathbf{R}^n$, on dit que l'état $x_f \in \mathbf{R}^n$ est atteignable en temps τ à partir de x_0 s'il existe une commande $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbf{R}^m$ telle que $x(\tau, x_0, u(\cdot)) = x_f$. On note $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ l'ensemble des états atteignables à partir de x_0 en temps τ :

$$\mathcal{A}(\tau, x_0) = \{x(\tau, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

Théorème II.2

Soit $u(\cdot)$ une commande et $x_0 \in \mathbf{R}^n$, l'unique solution de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0$ est

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Démonstration

Il suffit de poser $b(t) = Bu(t)$ dans 2.(2.6). \square

En particulier dans le cas où $x_0 = 0$ on a $x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds$ et $x(t)$ dépend linéairement de la commande $u(\cdot)$. Par suite $\mathcal{A}(\tau, 0)$ est un espace vectoriel et $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ est l'espace affine $e^{\tau A}x_0 + \mathcal{A}(\tau, 0)$. Donc l'espace $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ est complètement caractérisé par l'ensemble $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}(\tau, 0)$.

Définition II.3 Le système $(\Sigma)_1$ est contrôlable en temps τ si $\mathcal{A}(\tau, 0) = \mathbf{R}^n$, ou de façon équivalente si tout état est atteignable en temps τ à partir de n'importe quel état.

Théorème II.4

L'espace \mathcal{A}_τ est égal à l'image de la matrice (n, nm) de contrôlabilité

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}.$$

Remarque II.5

- (i) $\text{Im}C = \mathcal{R}(A, B) \subset \mathbf{R}^n$ avec $\mathcal{R}(A, B)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $A^i Bz, i \in \{0, \dots, n-1\}, z \in \mathbf{R}^n$.
- (ii) \mathcal{A}_τ est indépendant de τ .
- (iii) $\dim \mathcal{A}_\tau = \text{rang}(C)$.

Corollaire II.6 (Critère de contrôlabilité de Kalman)

Le système $(\Sigma)_1$ est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité est de rang n .

Démonstration

- (i) Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{R}(A, B)$. soit donc $v \in \mathcal{A}_\tau$, alors il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que $v = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} Bu(s)ds$. Le polynôme caractéristique de A annule A , par suite A^n et toute puissance de A est une combinaison linéaire de I, A, \dots, A^{n-1} . On en déduit que pour tout i A^i laisse invariant $\mathcal{R}(A, B)$. Il en est donc de même pour $e^{(\tau-s)A}$ de part sa définition. Ceci a pour conséquence que pour tout $s, e^{(\tau-s)A} Bu(s) \in \mathcal{R}(A, B)$ qui est un espace vectoriel, d'où $v = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} Bu(s)ds \in \mathcal{R}(A, B)$.
- (ii) Pour montrer l'inclusion $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathcal{A}_\tau$, nous allons voir que $\mathcal{A}_\tau^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$. Soit donc $w \in \mathbf{R}^n, w \perp \mathcal{A}_\tau$, alors $w \perp \tilde{w}$, état atteignable par la commande $u(t) = B^T(e^{(\tau-t)A})^T w$ qui est $\tilde{w} = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} BB^T(e^{(\tau-t)A})^T w ds$. D'où

$$\begin{aligned} 0 = \langle w, \tilde{w} \rangle &= \int_0^\tau w^T e^{(\tau-s)A} BB^T(e^{(\tau-t)A})^T w ds \\ &= \int_0^\tau ((e^{(\tau-s)A} B)^T w)^T ((e^{(\tau-s)A} B)^T w) ds \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $s, (e^{(\tau-s)A} B)^T w = 0$. Dérivons maintenant par rapport à s une fois, deux fois, ..., alors $(e^{(\tau-s)A} A^i B)^T w = 0$ et donc, $s = \tau, (A^i B)^T w = 0$ pour tout i . On en déduit que pour tout $z \in \mathbf{R}^m, \langle z, (A^i B)^T w \rangle = \langle (A^i B)z, w \rangle = 0$ et donc que $w \in \mathcal{R}(A, B)^\perp$.

\square

Exemple II.7

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_2 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C est donc de rang 2 et le système est contrôlable.

Exemple II.8

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_3 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2\alpha x_2(t) + \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u(t). \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & 2\alpha\beta_1 & 2\alpha\beta_2 \end{pmatrix}.$$

C est donc de rang 1 si et seulement si $\beta_1 = \beta_2$ et $\alpha = 0$. Le système est contrôlable dans le cas contraire.

III Stabilisation par retour d'état

III.1 Introduction

Rappelons les différences entre la boucle ouverte et la boucle fermée.

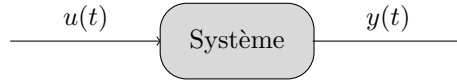


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle ouverte.

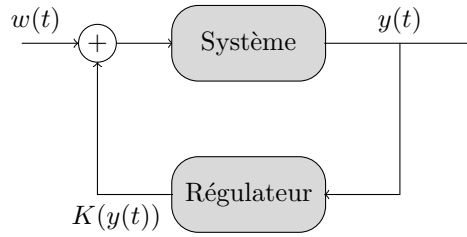


FIGURE 3.2 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée par retour de sortie.

En pratique, on veut bien sur réguler le système en boucle fermée. Si $y(t) = x(t)$ alors $u(t) = w(t) + K(x(t))$. On parle alors de contrôle par retour d'état. On souhaite bien sûr avoir un contrôle qui stabilise asymptotiquement l'état, c'est-à-dire un contrôle qui ramène le système à un point de fonctionnement.

Définition III.1 (Point de fonctionnement) On appelle point de fonctionnement d'un système contrôlé un point tel que $f(x_e, u_e) = 0$.

Si (x_e, u_e) est un point de fonctionnement alors bien évidemment $x(t) = x_e$ est une solution du problème de Cauchy

$$(IVP)_3 \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_e, \end{cases}$$

où le contrôle est $u(t) = u_e$ pour tout t .

III.2 Cas d'un système linéaire et autonome

On considère donc ici le cas de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ et où le point de fonctionnement est le point d'équilibre du système non contrôlé, c'est-à-dire que $(x_e, u_e) = (0, 0)$ (A est supposé inversible).

Définition III.2 Le système contrôlé $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit asymptotiquement stable par retour d'état s'il existe un contrôle $u(t) = K(x(t))$ tel que l'origine soit un équilibre asymptotiquement stable de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = Ax(t) + BK(x(t))$, appelée équation du système bouclé.

On va ici chercher un contrôle de la forme $u(t) = Kx(t)$, K une matrice (m, n) . On dit alors que l'on a une loi de contrôle proportionnelle. Dans ce cas si le système contrôlé est asymptotiquement stable, on aura donc $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour toutes conditions initiales.

Le problème se ramène alors à trouver une matrice K tel que toutes les valeurs propres de $A + BK$ soient à partie réelle strictement négative.

Théorème III.3 (Théorème de placement de pôles)

Si les matrices A et B satisfont au critère de Kalman, c'est-à-dire si le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable, alors pour tout $\rho \in \mathbf{R}$, il existe une matrice K telle que les valeurs propres de $A + BK$ soient à partie réelle strictement inférieure à ρ .

Démonstration

Voir l'annexe B.4 de [2]. \square

Exemple III.4

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_4 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

(i) Les points de fonctionnement sont les points $(x_e, u_e) = (x_{e1}, 0, 0)$

(ii) $u(t) = Kx(t)$ par suite $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ et

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - (A + BK)) = \lambda^2 - \lambda k_2 - k_1.$$

Pour avoir comme pôle -1 , il faut que $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ et donc que $k_1 = -1$ et $k_2 = -2$.

(iii) Si $u(t) = kx_1(t) = \begin{pmatrix} k & 0 \end{pmatrix} x(t) = Kx(t)$ alors

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite $\det(\lambda I - (A + BK)) = \lambda^2 - k$. On a donc 3 cas

- (a) Si $k > 0$ alors $\lambda = \pm\sqrt{k}$ et donc une valeur propre est strictement négative. Le système n'est donc pas stable.
- (b) Si $k = 0$ alors l'unique valeur propre est nulle, mais $\dim \ker(A + BK) = 1$. Par suite le système n'est pas stable.
- (c) $k < 0$, les valeurs propres sont $\pm i\sqrt{-k}$. Le système est donc stable mais non asymptotiquement stable.

III.3 Cas non linéaire

On s'intéresse dans cette sous section au cas d'un système contrôlé non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. On désire stabiliser le système autour d'un point de fonctionnement par retour d'état proportionnel $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$. Le système bouclé est donc

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e)) = g(x(t)),$$

dont x_e est un point d'équilibre. Comme $g(x) = f(x, u_e + K(x - x_e))$,

$$g'(x) \cdot \delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u_e + K(x - x_e)) \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_e + K(x - x_e)) K \delta x.$$

Par suite

$$\begin{aligned} g'(x_e) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) K \\ &= A + BK. \end{aligned}$$

Le théorème précédent dit qu'il suffit que les matrices A et B vérifient le critère de Kalman pour avoir l'existence d'un contrôle par retour d'état proportionnel permettant de stabiliser le système autour du point de fonctionnement.

Exemple III.5

¹ On considère un mélangeur dans lequel arrive un même produit, par deux entrées différentes, avec des concentrations respectivement c_1 et c_2 (constantes), et des débits $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Le volume dans le mélangeur est noté $V(t)$ et la concentration $c(t)$. Le débit en sortie est $d(t) = \gamma\sqrt{V(t)}$, où γ est une constante. Les contrôles sont $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Un bilan volume-matière permet d'établir que l'on a le système

$$(S) \begin{cases} \dot{V}(t) = u_1(t) + u_2(t) - \gamma\sqrt{V(t)} \\ \dot{c}(t) = \frac{1}{V(t)}((c_1 - c(t))u_1(t) + (c_2 - c(t))u_2(t)) \end{cases}$$

(i) Le système s'écrit $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 - \gamma\sqrt{x_1} \\ \frac{1}{x_1}((c_1 - x_2)u_1 + (c_2 - x_2)u_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) (x_e, u_e) est un point de fonctionnement si et seulement si

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - \gamma\sqrt{x_1} = 0 \\ \frac{1}{x_1}((c_1 - x_2)u_1 + (c_2 - x_2)u_2) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\iff \begin{cases} u_{1e} + u_{2e} = d_e = \gamma\sqrt{V_e} \\ c_1 u_{1e} + c_2 u_{2e} = c_e d_e = c_e \gamma \sqrt{V_e} \end{cases}$$

(iii) On considère le contrôle $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$; K est ici une matrice (2,2) et on se pose la question de savoir quelles conditions il faut sur les coefficient de K pour que le système contrôlé soit asymptotiquement stable. Calculons pour cela

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\sqrt{x_{e1}}} & 0 \\ -\frac{1}{x_{e1}^2}((c_1 - x_{e2})u_{e1} + (c_2 - x_{e2})u_{e2}) & -\frac{u_{e1} + u_{e2}}{x_{e1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1 - x_{e2}}{x_{e1}} & \frac{c_2 - x_{e2}}{x_{e1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Il faut donc trouver les coefficient de K tels que les valeurs propres de $A + BK$ soient à partie réelle strictement négative. Or

$$A + BK = \begin{pmatrix} k_{11} + k_{21} + \alpha & k_{12} + k_{22} \\ \beta_1 k_{11} + \beta_2 k_{21} & \beta_1 k_{12} + \beta_2 k_{22} + 2\alpha \end{pmatrix},$$

par suite, les conditions (voir le TD1) sont

$$\begin{cases} \det(A + BK) > 0 \\ \text{trace}(A + BK) < 0 \end{cases}.$$

Remarque III.6

Dans ce cas le système suivant appelé système linéarisé autour du point de fonctionnement

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$$

est contrôlable.

Remarque III.7

En pratique les contrôles sont contraints. Par exemple si le contrôle est l'intensité d'un courant il doit avoir une valeur positive ou nulle et doit être borné par une valeur maximale, par suite $U \neq \mathbf{R}^m$. La contrôlabilité, la stabilité, etc. sont alors plus difficiles à obtenir.

Bibliographie

- [1] Morris W. Hirsh and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1974.
- [2] Frédéric Jean. *Stabilité et Commande des Systèmes Dynamiques. Cours et exercices corrigés*. Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, 200 pages, nov. 2011.
- [3] Gergaud Joseph. *Cours photocopié d'équations différentielles ordinaires*. 2016.
- [4] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Number 6 in Textbooks in Applied Mathematics. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [5] C. Wagschal. *Dérivation, Intégration*. Hermann, 1999.