

Automatique — Système commandé

## Chapitre 3 : Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

Olivier Cots

16 septembre 2024



## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

- 3.1. Introduction
- 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées
- 3.3. Contrôlabilité
- 3.4. Stabilisation par retour d'état
  - 3.4.1. Définitions
  - 3.4.2. Cas linéaire
  - 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation

Nous nous intéressons aux **systèmes dynamiques contrôlés** de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système au temps  $t$  et  $u(t)$  est le contrôle ou la commande au temps  $t$  que l'on peut réaliser pour agir sur le système.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à la **stabilisation** de l'équation différentielle contrôlée par l'intermédiaire d'un contrôle par **retour d'état** linéaire (ou affine) de la forme

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e), \quad K \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R}),$$

au voisinage d'un point de **fonctionnement**  $(x_e, u_e)$  telle que  $f(x_e, u_e) = 0$ .

**Remarque 3.1.1.** Si  $x_0 = x_e$  alors on a trivialement comme solution  $x(t) = x_e$  pour tout  $t$  en appliquant le contrôle constant  $u(t) = u_e$ .

**Question :** Comment choisir  $K$  pour que le système dynamique associé, qui ne dépend que de  $x$ , stabilise asymptotiquement le système au voisinage du point d'équilibre  $x_e$  ?

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Pi$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et une application continue

$$\begin{aligned} f: \quad \Omega \times \Pi &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u). \end{aligned}$$

Soit un contrôle  $u$  **admissible**, c'est-à-dire une fonction **continue** à valeurs dans  $\Pi$ . On dit que la fonction  $\varphi$  est solution de **l'équation différentielle contrôlée** (autonome) de **second membre**  $f$ , associée au contrôle  $u$ , si  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle ordinaire associée

$$\dot{x}(t) = f_u(t, x(t)), \quad f_u(t, x) := f(x, u(t)).$$

Supposons de plus  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à la variable  $x$ . Alors, pour tout contrôle admissible  $u$  et toute condition initiale  $x_0$ , il existe une unique solution maximale à

$$\dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

que l'on note

$$x_u(\cdot, x_0).$$

Pour le système contrôlé linéaire

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R}). \quad (\Sigma_{u,L})$$

la solution maximale est globale et est donnée par

$$x_u(t, x_0) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds.$$

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation



On s'intéresse ici à la question suivante : étant donné le système

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \quad (\Sigma_u)$$

et une condition initiale  $x_0 \in \Omega$ , où peut-on aller en temps fini  $t \geq 0$ , en faisant varier le contrôle  $u$ ? Nous définissons tout d'abord la notion d'ensemble accessible.

### Définition 3.3.1 – Ensemble accessible

L'**ensemble accessible** (ou atteignable)  $\mathcal{A}(t, x_0)$  en temps  $t \geq 0$  depuis  $x_0 \in \Omega$  pour le système  $(\Sigma_u)$  est l'ensemble des solutions au temps  $t$  pour tout contrôle  $u$  admissible :

$$\mathcal{A}(t, x_0) := \{x_u(t, x_0) \mid u \in \mathcal{C}^0([0, t], \Pi)\}.$$

On note  $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C}^0([0, t], \Pi)$  et on introduit l'application entrée/sortie :

$$\begin{aligned} E_{t, x_0}: \quad \mathcal{C}^0 &\longrightarrow \Omega \\ u &\longmapsto E_{t, x_0}(u) := x_u(t, x_0) \end{aligned}$$

de telle sorte que  $\mathcal{A}(t, x_0) = E_{t, x_0}(\mathcal{C}^0)$ .

On note  $\text{Int}(A)$  l'intérieur d'un ensemble  $A$  et  $\text{Front}(A)$  sa frontière.

### Définition 3.3.2 – Contrôlabilités

Soit le temps  $t > 0$ . Le système  $(\Sigma_u)$  est :

- **contrôlable** depuis  $x_0 \in \Omega$  en  $t$  si  $\mathcal{A}(t, x_0) = \Omega$ .
- **complètement contrôlable** en  $t$  si  $\mathcal{A}(t, x_0) = \Omega$  pour tout  $x_0 \in \Omega$ .
- **localement contrôlable** en  $x_0 \in \Omega$  en  $t$  autour de  $x_1 \in \Omega$  si  $x_1 \in \text{Int}(\mathcal{A}(t, x_0))$ .

**Remarque 3.3.1.** Si  $E_{t,x_0}$  est surjective alors  $(\Sigma_u)$  est contrôlable depuis  $x_0$  en  $t$ . Si  $E'_{t,x_0}(u)$  est surjective alors  $(\Sigma_u)$  est localement contrôlable autour de  $E_{t,x_0}(u)$ .

Nous avons alors le résultat fondamental suivant dans le cas linéaire.

### Théorème 3.3.3 – Critère de contrôlabilité de Kalman

*Le système linéaire  $(\Sigma_{u,L})$  est complètement contrôlable en tout temps  $t > 0$  ssi*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

**Exemple 3.3.1.** Soit le système contrôlé

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t).$$

On a :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$C := [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et puisque  $\text{rang}(C) = 2$ , le système est contrôlable.

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation

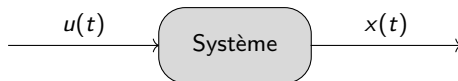


Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle ouverte.

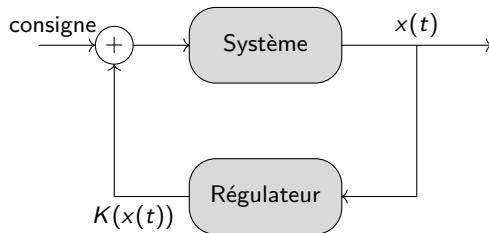


Figure 1 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée par retour d'état.

**Définition 3.4.1 – Point de fonctionnement**

On appelle **point de fonctionnement** d'un système contrôlé une paire  $(x_e, u_e)$  telle que  $f(x_e, u_e) = 0$ .

Si  $(x_e, u_e)$  est un point de fonctionnement alors bien évidemment  $x(t) = x_e$  est une solution du problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_e,$$

pour le contrôle constant  $u(t) = u_e$ .

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation



On considère le système contrôlé linéaire  $(\Sigma_{u,L})$  :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

et on s'intéresse seulement au point de fonctionnement  $(x_e, u_e) = (0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^m})$  (on peut toujours se ramener à ce cas par une simple translation).

### Définition 3.4.2

Le système contrôlé linéaire  $(\Sigma_{u,L})$  est dit **asymptotiquement stabilisable** (par retour d'état) s'il existe une matrice  $K \in \mathbf{M}_{m,n}$  telle que le contrôle

$$u(t) = K x(t)$$

stabilise asymptotiquement à l'origine le **système bouclé**

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) = (A + B K) x(t).$$

**Remarque 3.4.1.** Pour montrer qu'un système linéaire est asymptotiquement stabilisable, il faut trouver une matrice  $K$  telle que les valeurs propres de  $A + BK \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  soient à partie réelle strictement négative.

**Théorème 3.4.3 – Théorème de placement de pôles**

*Si les matrices  $A$  et  $B$  satisfont le critère de contrôlabilité de Kalman, alors le système associé  $(\Sigma_{u,L})$  est asymptotiquement stabilisable.*

**Remarque 3.4.2.** Les **pôles** du système sont les valeurs propres de  $A + BK$ .

**Exemple 3.4.1.** On considère le système contrôlé

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t).$$

On sait d'après l'Exemple 3.3.1 que le système est asymptotiquement stabilisable.

- Donner les points de fonctionnement du système.
- Trouver  $K = [k_1 \quad k_2]$  pour avoir comme pôle (double)  $-1$ .
- Peut-on trouver  $k$  afin de stabiliser à l'origine  $x_e = (0, 0)$  le système bouclé par le contrôle  $u(t) = k x_1(t)$  ?

**Remarque 3.4.3.** Dans le TD2, on introduira la notion de régulateur PID sur un exemple de stabilisation dans le cas linéaire. Le premier exercice du TD3 répondra aux questions de cet exemple.

## Chapitre 3: Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

### 3.1. Introduction

### 3.2. Solutions des équations différentielles contrôlées

### 3.3. Contrôlabilité

### 3.4. Stabilisation par retour d'état

#### 3.4.1. Définitions

#### 3.4.2. Cas linéaire

#### 3.4.3. Cas non linéaire : stabilisation par linéarisation

On considère un système contrôlé non linéaire autonome

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

et on s'intéresse à la stabilisation autour d'un point de fonctionnement  $(x_e, u_e)$  par retour d'état linéaire (au sens large, c'est-à-dire linéaire ou affine) :

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e).$$

Le système bouclé est donc

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e)) = f(x(t), \bar{u}(x(t))) =: g(x(t)),$$

avec  $\bar{u}(x) := u_e + K(x - x_e)$ . On remarque alors que  $x_e$  est un point d'équilibre de  $g$ , i.e.  $g(x_e) = 0$ . La stabilité asymptotique de  $x_e$  est liée aux valeurs propres de  $g'(x_e)$ . Or,

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \bar{u}(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}(x)) K.$$

Par suite

$$g'(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) K =: A + B K.$$

En conclusion, il faut trouver  $K \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  telle que les valeurs propres de

$$g'(x_e) = A + B K$$

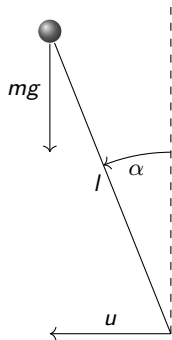
soient à partie réelle strictement négative !

**Remarque 3.4.4.** En pratique les contrôles sont contraints. Par exemple si le contrôle est l'intensité d'un courant il doit avoir une valeur positive ou nulle et doit être borné par une valeur maximale. La contrôlabilité, la stabilité et d'autres propriétés sont alors plus difficiles à obtenir.

**Exemple 3.4.2.** La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule est l'accélération du déplacement que l'on peut exercer horizontalement. Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ l\dot{x}_2(t) = g \sin(x_1(t)) - \cos(x_1(t)) u(t) \end{cases}$$

- L'origine est-elle stable, asymptotiquement stable, pour le système non contrôlé ?
- Déterminer les points de fonctionnement du système.
- Donner les conditions sur  $K$  pour que le contrôle par retour d'état  $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$  stabilise asymptotiquement le système bouclé en un point de fonctionnement  $(x_e, u_e)$ ,  $x_e = (x_{e,1}, x_{e,2})$ , vérifiant  $\cos x_{e,1} > 0$ .



Pendule inversé contrôlé.

**Remarque 3.4.5.** Dans le TD3, on répondra à ces questions et d'autres.