



# MODIA - Modélisation et Calcul Scientifique

## Année scolaire 2020-2021

Examen écrit - Durée 2h

Corrigé, partie EDO

### 1 Partie équation différentielles ordinaires

#### ▷ Exercice 1.

1.1. On pose  $y(t) = (x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$  et  $y_0 = (x_{01}, x_{02}, v_{01}, v_{02})$ . Le système s'écrit alors

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_3(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = -\frac{\mu y_1(t)}{\|r(t)\|^3} \\ \dot{y}_4(t) = -\frac{\mu y_2(t)}{\|r(t)\|^3} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

avec  $r(t) = (y_1(t), y_2(t))$ . On a donc  $\varphi$  qui est définie par

$$\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$$

$$(s, z) \longmapsto \varphi(s, z) = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \mu z_1 \\ -\frac{\mu z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}^3} \\ \mu z_2 \\ -\frac{\mu z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}^3} \end{pmatrix}$$

1.2.

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) \in \mathcal{M}_{(4,4)}(\mathbf{R}).$$

**1.3.** On pose  $r(t, y_0) = (y_1(t, y_0), y_2(t, y_0))$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(\cdot, y_0)$$

est alors solution de

$$(VAR) \begin{cases} \dot{Y}(t) = A(t)Y(t) \\ Y(0) = I, \end{cases}$$

avec

$$A(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, y(t, y_0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{\|r(t, y_0)\|^3} + \frac{3\mu y_1^2(t, y_0)}{\|r(t, y_0)\|^5} & \frac{3\mu y_1(t, y_0)y_2(t, y_0)}{\|r(t, y_0)\|^5} & 0 & 0 \\ \frac{3\mu y_1(t, y_0)y_2(t, y_0)}{\|r(t, y_0)\|^5} & -\frac{\mu}{\|r(t, y_0)\|^3} + \frac{3\mu y_2^2(t, y_0)}{\|r(t, y_0)\|^5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ **Exercice 2.**

**2.1.**

$$\begin{cases} k_1 = \varphi(t_0, y_0 + h((1/6)k_1 - (1/3)k_2 + (1/6)k_3)) \\ k_2 = \varphi(t_0 + (1/2)h, y_0 + h((1/6)k_1 + (5/12)k_2 - (1/12)k_3)) \\ k_3 = \varphi(t_0 + h, y_0 + h((1/6)k_1 + (2/3)k_2 + (1/6)k_3)) \\ y_1 = y_0 + h((1/6)k_1 + (2/3)k_2 + (1/6)k_3) \end{cases}$$

**2.2.** Ce schéma est implicite.

**2.3.**

$$\begin{pmatrix} I - (h/6)A & (h/3)A & -(h/6)A \\ (h/6)A & I - (5h/12)A & (h/12)A \\ -(h/6)A & -(2h/3)A & I - (h/6)A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_0 + b \\ Ay_0 + b \\ Ay_0 + b \end{pmatrix},$$

où  $I$  est la matrice identité  $(n, n)$ . Le système est de dimension  $3n$ .