



## Examen écrit d'équations différentielles ordinaires et de calcul différentiel - Durée 1h15

Documents autorisés : 1 feuille A4 manuscrite recto-verso

Un corrigé sera mis sur le GitLab du cours dans la journée de lundi

### ▷ Exercice 1. (10 points)

Soit  $\omega$  et  $\omega_0$  deux constantes strictement positives, on considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad \ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos(\omega t)$$

**1.1.** Donner la fonction  $f$  qui permet d'écrire l'équation différentielle sous la forme  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

► On pose  $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (y(t), \dot{y}(t))$ ,  $(E)$  est alors équivalent à

$$(E') \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_1(t) + \cos(\omega t). \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega_0^2 x_1 + \cos(\omega t) \end{pmatrix} = Ax + b(t) \end{aligned}$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} b: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{et} \quad t &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**1.2.** L'équation différentielle est-elle autonome ? Est-elle linéaire ?

► Elle est linéaire mais n'est pas autonome ( $b$  dépend de  $t$ ).

**1.3.** Soit  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},$$

calculer à l'aide de la définition  $e^{tA}$ .

► On constate que  $A^2 = -\omega_0^2 I$ , par suite

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

1.4. En déduite l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène.

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

►  $S = \{e^{tA}x_0, x_0 \in \mathbb{R}^2\}$ .

1.5. Soit  $\omega \neq \omega_0$ , montrer que  $y_p(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$  est une solution de l'équation différentielle (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E) et montrer que toute solution reste bornée.

► Il suffit de vérifier que

$$(E) \quad \ddot{y}_p(t) + \omega_0^2 y_p(t) = \cos(\omega t).$$

Comme l'edo est linéaire on a

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \begin{pmatrix} y_p(t) \\ \dot{y}_p(t) \end{pmatrix}.$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(\omega_0 t)x_{01} + \sin(\omega_0 t)\frac{x_{02}}{\omega_0} + y_p(t) \\ x_2(t) &= -\omega_0 \sin(\omega_0 t)x_{01} + \cos(\omega_0 t)x_{02} + \dot{y}_p(t) \\ &= -\omega_0 \sin(\omega_0 t)x_{01} + \cos(\omega_0 t)x_{02} - \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq |x_{01}| + \left| \frac{x_{02}}{\omega_0} \right| + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ |x_2(t)| &\leq \omega_0 |x_{01}| + |x_{02}| + \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

la solution est donc bien bornée

1.6. Soit  $\omega = \omega_0$ , montrer que  $y_p(t) = \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega t)$  est une solution de l'équation différentielle (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E). Ces solutions sont-elles bornées ?

► Il suffit de vérifier que

$$(E) \quad \ddot{y}_p(t) + \omega_0^2 y_p(t) = \cos(\omega t).$$

Comme l'edo est linéaire on a comme précédemment

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \begin{pmatrix} y_p(t) \\ \dot{y}_p(t) \end{pmatrix}.$$

On a donc  $x_1(t) = \cos(\omega t)x_{01} + \sin(\omega t)\frac{x_{02}}{\omega} + \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$ . Les deux premier termes sont biens borné, mais pour le dernier on a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) \right\} = +\infty.$$

La figure 1 ci-après montre un exemple de résonance.

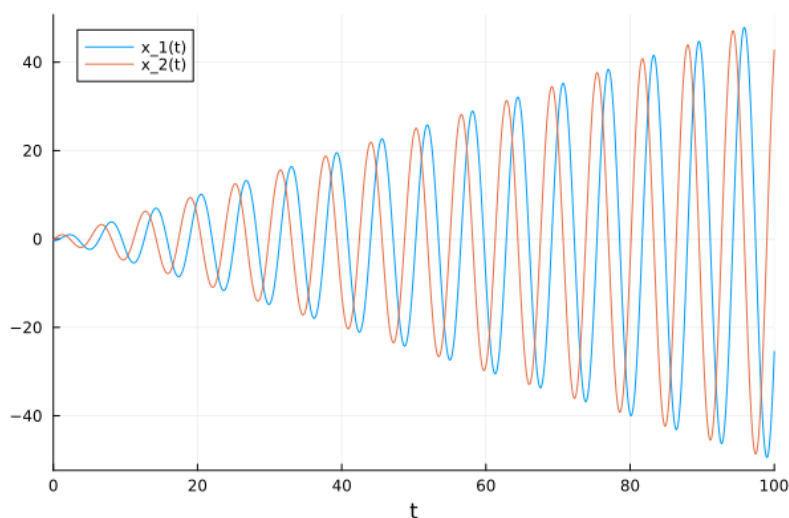


FIGURE 1 – *visualisation du phénomène de résonance*,  $\omega = \omega_0 = 1$ ,  $tf = 100$  et  $x_0 = (-9/25, -4/25)$ .

**Remarque 1.** Le cas  $\omega = \omega_0$  conduit à ce qu'on appelle un phénomène de résonance. C'est ce phénomène qui intervient dans :

- Le sifflement que l'on entend parfois lorsqu'il y a du vent et que l'on est proche de câbles électriques aériens d'EDF ;
- L'écroulement de pont lorsque l'on marche au pas. Le 16 avril 1850, une troupe traversant en ordre serré le pont de la Basse-Chaîne, pont suspendu sur la Maine à Angers, provoqua la rupture du pont par résonance et la mort de 226 soldats. Pourtant, le règlement militaire interdisait déjà de marcher au pas sur un pont, ce qui laisse à penser que ce phénomène était connu auparavant.<sup>1</sup>
- La balançoire : les mouvements des jambes jouent le rôle de  $\cos(\omega t)$  et est responsable des oscillations de plus en plus importantes de la balançoire (si on est en phase, c'est-à-dire si  $\omega = \omega_0$ ) ;
- le son qui sort d'instruments de musique ;
- ...

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le système de Cauchy suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_1(t) + \cos(\omega t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**2.1.** On note  $\lambda = (\omega_0, \omega)$  et  $x(t, x_0, \lambda)$  la solution en  $t$  du problème (IVP). Quelle est la dimension de

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, x_0, \lambda)?$$

---

1. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Resonance#Ponts>

► La dérivée partielle

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

La dimension de la matrice jacobienne associée est donc  $(2, 2)$ .

**2.2.** On suppose connue la solution  $x(t, x_0, \lambda)$  pour les valeurs fixées de  $x_0$  et de  $\lambda_0$ . Donnez l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot, x_0, \lambda_0).$$

On donnera les dimensions des matrices  $A(t)$  et  $B(t)$  et on explicitera celles-ci en fonction de  $x(t, x_0, \lambda_0)$  et de  $\lambda_0$ .

►

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot, x_0, \lambda_0)$$

est solution de

$$(VAR) \begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

avec  $X(t) \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ ,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, x_0, \lambda_0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$$

et

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, x_0, \lambda_0)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\omega_0 x_1(t, x_0, \lambda_0) & -t \sin(\omega t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

▷ **Exercice 3.** (7 points) On considère le problème à valeur initiale suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \dot{x}(t) = t - 1 & \text{si } t > 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

**3.1.** Donnez la fonction  $f$  (espace de départ, espace d'arrivée et définition de la fonction) permettant d'écrire le système sous la forme

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

►

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ t - 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

**3.2.** À l'aide du théorème d'existence de solution du cours montrez que ce système possède une unique solution.

►  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  est continue et la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0$  pour tout  $(t, x) \in \Omega$ . Par suite  $f$  est lipschitzienne par rapport à  $x$  de constante  $k = 0$  sur tout  $\Omega$ . On peut donc appliquer le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy Lipschitz.

**Remarque 2.** On a même ici en appliquant le corollaire (I.11) du chapitre 3 du cours l'existence sur l'intervalle  $I = \mathbb{R}$ .

**3.3.** Calculez la solution de ce problème.

► La solution est

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1], \\ (t-1)^2/2 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

**3.4.** On considère les schémas d'Euler explicite et  $rk2$  défini par le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

Pour l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  avec  $t_i < 1 < t_{i+1}$  et  $x_i = x(t_i) = 0$ , donnez pour ces deux schémas les valeurs de  $x_{i+1}$  approximation de la solution  $x(t_{i+1})$  (pour  $rk2$  on donnera les deux valeurs possibles suivant le signe de  $t_i + h/2 - 1$ , où  $h = t_{i+1} - t_i$ ).

►

1. Euler

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) = x_i = 0.$$

2. rk2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) = x_i = 0 \\ k_2 &= f(t_i + h/2, x_i + (h/2)f(t_i, x_i)) \\ x_{i+1} &= x_i + hk_2 \end{aligned}$$

- Cas 1  $t_i + h/2 < 1$ , alors  $k_2 = 0$  et  $x_{i+1} = 0$ .
- Cas 2,  $t_i + h/2 > 1$ , alors  $k_2 = t_i + h/2 - 1$  et  $x_{i+1} = h(t_i + h/2 - 1)$ .

**3.5.** En déduire pour cet exemple l'ordre de ces deux schémas. Commentaire.

► Pour les deux schémas on trouve sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  ci-dessus comme erreur locale

$$e_i = |x(t_{i+1}, x_i) - x_{i+1}| = O(h^2).$$

Par suite ces deux schémas sont d'ordre 1.

Dans le cours Euler est d'ordre 1 et rk2 d'ordre 2. On ne retrouve pas sur cet exemple le résultat pour rk2 car la fonction  $f$  n'est pas dérivable sur  $\Omega$  et donc la solution  $x(t)$  n'est pas dérivable deux fois.