

Examen Ãcrit - DurÃe 2h

Le sujet comprend trois parties indÃpendantes, portant respectivement sur les Ãquations diffÃrentielles, la modÃlisation par edp, et les mÃthodes numÃriques pour les edp. Les notes de cours, TD et TP sont autorisÃes mais l'usage de tout appareil Ãlectronique est interdit. **Il est demandÃ d'utiliser une copie diffÃrente pour chacune des trois parties.**

Partie 1 (40') : Equations diffÃrentielles

Exercice 1.1. On considÃre un satellite de masse nÃgligeable qui tourne autour de la Terre. Le systÃme diffÃrentiel qui dÃcrit le mouvement dans un systÃme de coordonnÃes cartÃsiennes est le suivant :

$$(IVP)_1 \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\frac{\mu x_1(t)}{\|x(t)\|^3} \\ \ddot{x}_2(t) = -\frac{\mu x_2(t)}{\|x(t)\|^3} \\ x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}, \\ \dot{x}_1(0) = v_{01}, \dot{x}_2(0) = v_{02} \end{cases}$$

oÃ $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est la position du satellite, $\ddot{x}(t)$ est son accÃlÃration, $\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$, μ est une constante et $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ et $v_0 = (v_{01}, v_{02})$ sont les position et vitesse initiales.

Question 1 *Ãcrire le systÃme sous la forme*

$$(IVP)_2 \begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On explicitera l'application φ et y_0 .

Question 2 *On note $y(t, y_0)$ la solution à l'instant t du systÃme $(IVP)_2$. Quelles sont les dimensions de*

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0).$$

Question 3 *Donner l'Ãquation variationnelle dont est solution*

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(\cdot, y_0).$$

Exercice 1.2. On considÃre l'Ãquation diffÃrentielle linÃaire autonome à condition initiale

$$(IVP)_2 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

et le schÃma de Runge Kutta donnÃ par le tableau de Butcher 1 (schÃma de type Lobatto IIIC)

0	1/6	-1/3	1/6
1/2	1/6	5/12	-1/12
1	1/6	2/3	1/6
	1/6	2/3	1/6

TABLE 1 – Tableau de Butcher pour le schéma de Lobatto IIIC d'ordre 4.

Question 4 Écrire le premier pas de ce schéma.

Question 5 Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

Question 6 Donner la dimension et écrire le système linéaire que l'on doit résoudre à chaque pas pour calculer les vecteurs k_i du schéma.

Partie 2 (40') : Modélisation par Équations aux dérivées partielles

Question 2.1. Soit l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d v^i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

où v^1, v^2, \dots, v^d sont des constantes réelles. Que modélise cette équation ? u_0 désignant la condition initiale, donner l'expression de la solution exacte lorsque le problème est posé sur tout l'espace.

Question 2.2. Si au contraire, on s'intéresse au problème (1) sur un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d , sur quelle partie de $\partial\Omega$ doit on imposer la condition aux limites ? Justifier la réponse et faire un schéma explicatif.

Question 2.3. Dans une edp de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{F}(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}) \right) = S, \quad (2)$$

que modélisent les termes $\vec{F}(\cdot)$ et $S(\cdot)$? Donner un exemple d'edp en Physique où la fonction \vec{F} dépend de $\vec{\nabla}u$. Pourquoi de nombreuses edp rencontrées en Physique sont elles de la forme (2) ?

Question 2.4. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d . Montrer que toute fonction v de classe C^2 sur Ω vérifie :

$$v\Delta v = \operatorname{div} \left(v\vec{\nabla}v \right) - \vec{\nabla}v \cdot \vec{\nabla}v \quad (3)$$

Question 2.5. Soit u une fonction de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$ vérifiant :

$$\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4)$$

En utilisant le résultat de la question 2.4, montrer que u vérifie :

$$\int_{\Omega} \|\vec{\nabla} u\|^2 dx = 0 \quad (5)$$

et en déduire la valeur de u .

Question 2.6. En déduire finalement que le problème :

$$\Delta u = f \text{ sur } \Omega, \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega \quad (6)$$

possède au plus une solution de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$.

Partie 3 (40') : Méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles