



**MODIA - Modélisation et Calcul
Scientifique**
Examen écrit d'équations différentielles ordinaires
- Durée 1h30
Documents autorisés : 1 feuille A4 manuscrite
recto-verso

▷ **Exercice 1.** (6 points)

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2t(1 + x(t)) \\ x(0) = x_0 = 0. \end{cases}$$

1.1. Donner la fonction f qui permet d'écrire l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

1.2. L'équation différentielle est-elle autonome ? Est-elle linéaire ?

1.3. Montrer que la solution du problème de Cauchy est $\varphi(t) = e^{t^2} - 1$.

1.4. On pose $x^{(0)}$ la fonction

$$\begin{aligned} x^{(0)} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On définit

$$x^{(n+1)}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^{(n)}(s)) ds.$$

Calculer $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ et $x^{(3)}(t)$.

1.5. 1. Pour t suffisamment proche de 0, vers quoi tend $x^{(n)}(t)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (justifiez votre réponse) ?

2. On note $x^*(t)$ cette limite. La convergence de $x^{(n)}$ vers x^* est-elle uniforme (justifiez votre réponse) ?

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le modèle de FitzHugh-Naguma[?] qui donne l'évolution en fonction du temps du voltage à travers la membrane d'un axone :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = c(x_1(t) - x_1^3(t)/3 + x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -(1/c)(x_1(t) - a + bx_2(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où

- x_1 est le voltage ;
- x_2 est la variable de recouvrement (modélise les courants extérieurs) ;
- $\theta = (a, b, c)$ sont les paramètres du modèle

2.1. On note $x(t, x_0, \theta_0)$ la solution en t du problème (IVP). Quelle est la dimension de

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(t, x_0, \theta_0)?$$

2.2. On suppose connue la solution $x(t, x_0, \theta_0)$ pour les valeurs fixées de x_0 et de θ_0 . Donnez l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(\cdot, x_0, \theta_0).$$

On donnera les dimensions des matrices $A(t)$ et $B(t)$ et on explicitera celles-ci en fonction de $x(t, x_0, \theta_0)$ et de θ_0 .

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$x_1 = x_0 + h(\alpha f(t_0, x_0) + \beta f(t_0 + h/2, x_0 + (h/2)f(t_0, x_0)) + \gamma f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0))).$$

3.1. Montrer que c'est un schéma de Runge-Kutta. On donnera le nombre d'étages et le tableau de Butcher de la table 1.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

3.2. On donne les tableaux de Butcher pour les schémas d'Euler, du point milieu et des trapèzes.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline \text{Euler} & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \\ \hline \text{point milieu} & & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ \hline \text{trapèze} & & \end{array}$$

TABLE 2 – *Schémas de Runge-Kutta classiques.*

Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on

- la méthode d'Euler ;
- la méthode du point milieu ;
- la méthode des trapèzes.

3.3. Quelles relations doivent satisfaire le triplet (α, β, γ) pour que la méthode soit

- constante ;
- d'ordre ≥ 1 ;
- d'ordre ≥ 2 .

On effectuera les calculs dans le cas où $x(t) \in \mathbf{R}$.

3.4. On considère maintenant dans \mathbf{R} le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Donner x_1 en fonction de x_0 et de h . En déduire que cette méthode ne peut être d'ordre 3.