



MODIA - Modélisation et Calcul Scientifique

Examen écrit d'équations différentielles ordinaires

- Durée 1h30

Corrigé

▷ **Exercice 1.** (6 points)

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2t(1 + x(t)) \\ x(0) = x_0 = 0. \end{cases}$$

1.1. Donner la fonction f qui permet d'écrire l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (t, x) &\longmapsto 2t(1 + x). \end{aligned}$$

1.2. L'équation différentielle est-elle autonome ? Est-elle linéaire ?

f est linéaire en x , donc le système est bien linéaire. Par contre f dépend explicitement de t , par suite le système n'est pas autonome.

1.3. Montrer que la solution du problème de Cauchy est $\varphi(t) = e^{t^2} - 1$.

Il suffit de faire le calcul.

1.4. On pose $x^{(0)}$ la fonction

$$\begin{aligned} x^{(0)} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On définit

$$x^{(n+1)}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^{(n)}(s)) ds.$$

Calculer $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ et $x^{(3)}(t)$.

$$\begin{aligned}
 x^{(1)}(t) &= 0 + \int_0^t 2s(1 + x^{(1)}(s))ds \\
 &= \int_0^t 2s(1 + 0)ds \\
 &= t^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^{(2)}(t) &= 0 + \int_0^t 2s(1 + x^{(1)}(s))ds \\
 &= \int_0^t 2s(1 + s^2/2)ds \\
 &= t^2 + \frac{t^4}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^{(3)}(t) &= 0 + \int_0^t 2s(1 + 0)ds \\
 &= t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}.
 \end{aligned}$$

- 1.5.** 1. Pour t suffisamment proche de 0, vers quoi tend $x^{(n)}(t)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (justifiez votre réponse) ?
2. On note $x^*(t)$ cette limite. La convergence de $x^{(n)}$ vers x^* est-elle uniforme (justifiez votre réponse) ?

L'itération précédente est l'itération du point fixe intervenant dans la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de la solution de Cauchy-Lipschitz. Comme l'équation différentielle vérifie les hypothèses de ce théorème la suite $x^{(n)}$ converge localement en t_0 vers la solution du système qui est φ . Cette convergence est uniforme (voir la démonstration du théorème de Cauchy Lipschitz).

- ▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le modèle de FitzHugh-Naguma[?] qui donne l'évolution en fonction du temps du voltage à travers la membrane d'un axone :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = c(x_1(t) - x_1^3(t)/3 + x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -(1/c)(x_1(t) - a + bx_2(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où

— x_1 est le voltage ;

- x_2 est la variable de recouvrement (modélise les courants extérieurs) ;
- $\theta = (a, b, c)$ sont les paramètres du modèle

2.1. On note $x(t, x_0, \theta_0)$ la solution en t du problème (IVP). Quelle est la dimension de

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(t, x_0, \theta_0)?$$

La dérivée partielle

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(t, x_0, \theta_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2).$$

La dimension de la matrice jacobienne associée est donc $(2, 3)$.

2.2. On suppose connue la solution $x(t, x_0, \theta_0)$ pour les valeurs fixées de x_0 et de θ_0 . Donnez l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(\cdot, x_0, \theta_0).$$

On donnera les dimensions des matrices $A(t)$ et $B(t)$ et on explicitera celles-ci en fonction de $x(t, x_0, \theta_0)$ et de θ_0 .

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(\cdot, x_0, \theta_0)$$

est solution de

$$(VAR) \begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

avec $X(t) \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbf{R})$,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, x_0, \theta_0)) = \begin{pmatrix} c_0 - c_0 x_1^2(t, x_0, \theta_0) & c_0 \\ -1/c_0 & -b_0/c_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbf{R})$$

et

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\partial f}{\partial \theta}(t, x(t, x_0, \theta_0)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1(t, x_0, \theta_0) - x_1^3(t, x_0, \theta_0)/3 + x_2(t, x_0, \theta_0) \\ 1/c_0 & -x_2(t, x_0, \theta_0)/c_0 & (1/c_0^2)(x_1(t, x_0, \theta_0) - a + bx_2(t, x_0, \theta_0)) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$x_1 = x_0 + h(\alpha f(t_0, x_0) + \beta f(t_0 + h/2, x_0 + (h/2)f(t_0, x_0)) + \gamma f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0))).$$

3.1. Montrer que c'est un schéma de Runge-Kutta. On donnera le nombre d'étages et le tableau de Butcher de la table 1.

$$\frac{c}{b^T} \mid \frac{A}{b^T}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

On considère la méthode à un pas suivante

$$x_1 = x_0 + h(\alpha\varphi(t_0, x_0) + \beta\varphi(t_0 + h/2, x_0 + (h/2)\varphi(t_0, x_0)) + \gamma\varphi(t_0 + h, x_0 + h\varphi(t_0, x_0))).$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \varphi(t_0, x_0) \\ k_2 &= \varphi(t_0 + h/2, x_0 + (h/2)k_1) \\ k_3 &= \varphi(t_0 + h, x_0 + hk_1) \\ x_1 &= x_0 + h(\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3) \end{aligned}$$

Le tableau de Butcher associé est donc (*cf.* table 2).

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

TABLE 2 – *Tableau de Butcher.*

3.2. On donne les tableaux de Butcher pour les schémas d'Euler, du point milieu et des trapèzes.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \text{Euler} & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \\ \hline \text{point milieu} & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 & \\ \hline \text{trapèze} & \end{array}$$

TABLE 3 – *Schémas de Runge-Kutta classiques.*

Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on

- la méthode d'Euler ;
- la méthode du point milieu ;
- la méthode des trapèzes.

- $\alpha = 1, \beta = 0$ et $\gamma = 0$ pour la méthode d'Euler.
- $\alpha = 0, \beta = 1$ et $\gamma = 0$ pour la méthode du point milieu.
- $\alpha = 1/2, \beta = 0$ et $\gamma = 1/2$ pour la méthode des trapèzes.

3.3. Quelles relations doivent satisfaire le triplet (α, β, γ) pour que la méthode soit

- consistante ;
- d'ordre ≥ 1 ;
- d'ordre ≥ 2 .

On effectuera les calculs dans le cas où $y(t) \in \mathbf{R}$.

- Pour la consistance. Il faut $\Phi(t, x, 0) = \varphi(t, x) \iff \alpha + \beta + \gamma = 1$.
- Pour que l'ordre soit ≥ 1 . On a

$$\begin{aligned} x(t_0 + h) &= x_0 + h\dot{x}(t_0) + O(h^2) \\ &= x_0 + h\varphi(t_0, x_0) + O(h^2) \\ x_1 &= x_0 + h\Phi(t_0, x_0, h) \\ &= x_0 + h(\alpha\varphi(t_0, x_0) + \beta\varphi(t_0, x_0) + \gamma\varphi(t_0, x_0) + O(h)) \\ &= x_0 + h(\alpha + \beta + \gamma)\varphi(t_0, x_0) + O(h^2). \end{aligned}$$

Par suite l'ordre sera ≥ 1 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

- Pour que l'ordre soit ≥ 2 .

$$\begin{aligned} x(t_0 + h) &= x_0 + h\dot{x}(t_0) + (h^2/2)\ddot{x}(t_0) + O(h^3) \\ &= x_0 + h\varphi(t_0, x_0) + (h^2/2)(\varphi_t(t_0, x_0) + \varphi_x(t_0, x_0)\varphi(t_0, x_0)) + O(h^3) \\ x_1 &= x_0 + h\Phi(t_0, x_0, h) \\ &= x_0 + h(\alpha\varphi(t_0, x_0) + \beta(\varphi(t_0, x_0) + (h/2)(\varphi_t(t_0, x_0) + \varphi_x(t_0, x_0)\varphi(t_0, x_0))) \\ &\quad + \gamma(\varphi(t_0, x_0) + h(\varphi_t(t_0, x_0) + \varphi_x(t_0, x_0)\varphi(t_0, x_0))) + O(h^2)) \\ &= x_0 + h(\alpha + \beta + \gamma)\varphi(t_0, x_0) + (h^2/2)(\beta + 2\gamma)(\varphi_t(t_0, x_0) + \varphi_x(t_0, x_0)\varphi(t_0, x_0)) + O(h^3) \end{aligned}$$

Par suite l'ordre sera ≥ 2 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\beta + 2\gamma = 1$.

3.4. On considère maintenant dans \mathbf{R} le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Donner x_1 en fonction de x_0 et de h . En déduire que cette méthode ne peut être d'ordre 3.

On considère maintenant dans \mathbf{R} le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

$$x_1 = x_0(1 + (\alpha + \beta + \gamma)h + (\beta + 2\gamma)(h^2/2)).$$

Mais la solution exacte est

$$x(t_0 + h) = x_0 e^h = x_0(1 + h + h^2/2 + h^3/6 + O(h^4))$$

Le schéma ne peut donc être d'ordre ≥ 3 .