



## Examen écrit d'équations différentielles ordinaires et de calcul différentiel - Durée 1h15

**Documents autorisés : 1 feuille A4 manuscrite recto-verso**

**Un corrigé sera mis sur le GitLab du cours dans la journée de lundi**

▷ **Exercice 1.** (10 points)

Soit  $\omega$  et  $\omega_0$  deux constantes strictement positives, on considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad \ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos(\omega t)$$

**1.1.** Donner la fonction  $f$  qui permet d'écrire l'équation différentielle sous la forme  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

**1.2.** L'équation différentielle est-elle autonome ? Est-elle linéaire ?

**1.3.** Soit  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},$$

calculer à l'aide de la définition  $e^{tA}$ .

**1.4.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène.

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

**1.5.** Soit  $\omega \neq \omega_0$ , montrer que  $y_p(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$  est une solution de l'équation différentielle (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E) et montrer que toute solution reste bornée.

**1.6.** Soit  $\omega = \omega_0$ , montrer que  $y_p(t) = \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega t)$  est une solution de l'équation différentielle (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E). Ces solutions sont-elles bornées ?

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le système de Cauchy suivant

$$(IVP) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_1(t) + \cos(\omega t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**2.1.** On note  $\lambda = (\omega_0, \omega)$  et  $x(t, x_0, \lambda)$  la solution en  $t$  du problème (IVP). Quelle est la dimension de

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, x_0, \lambda)?$$

**2.2.** On suppose connue la solution  $x(t, x_0, \lambda)$  pour les valeurs fixées de  $x_0$  et de  $\lambda_0$ . Donnez l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot, x_0, \lambda_0).$$

On donnera les dimensions des matrices  $A(t)$  et  $B(t)$  et on explicitera celles-ci en fonction de  $x(t, x_0, \lambda_0)$  et de  $\lambda_0$ .

▷ **Exercice 3.** (7 points) On considère le problème à valeur initiale suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \dot{x}(t) = t - 1 & \text{si } t > 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

**3.1.** Donnez la fonction  $f$  (espace de départ, espace d'arrivée et définition de la fonction) permettant d'écrire le système sous la forme

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

**3.2.** À l'aide du théorème d'existence de solution du cours montrez que ce système possède une unique solution.

**3.3.** Calculez la solution de ce problème.

**3.4.** On considère les schémas d'Euler explicite et  $rk2$  défini par le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

Pour l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  avec  $t_i < 1 < t_{i+1}$  et  $x_i = x(t_i) = 0$ , donnez pour ces deux schémas les valeurs de  $x_{i+1}$  approximation de la solution  $x(t_{i+1})$  (pour  $rk2$  on donnera les deux valeurs possibles suivant le signe de  $t_i + h/2 - 1$ , où  $h = t_{i+1} - t_i$ ).

**3.5.** En déduire pour cet exemple l'ordre de ces deux schémas. Commentaire.