



INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
TOULOUSE



Sujet d'examen — Équations différentielles

Consignes.

- Document autorisée : une feuille A4 recto-verso écrite à la main ;
- Durée : 1h30.

▷ Exercice 1 (3 points).

1.1. Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$. On note $P: E \rightarrow F, x \mapsto P(x) = T(x) + y$. Montrer que P est de classe \mathcal{C}^1 et donner $P'(x)$. À quel espace appartient $P'(x)$?

1.2. Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Soient deux applications différentiables $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$. Donner pour tous x et v dans E , $(g \circ f)'(x) \cdot v$.

▷ Exercice 2 (6 points). Soient un entier n , une matrice réelle A de taille $n \times n$ et deux vecteurs de \mathbb{R}^n notés b et y_0 . Soit $t \mapsto y(t, y_0)$ la solution du problème de Cauchy : $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$, $x(0) = y_0$.

2.1. Donner $y(t, y_0)$ et $\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) \cdot v$ pour $v \in \mathbb{R}^n$.

2.2. De quel problème de Cauchy est solution $Y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) \cdot v$?

Soient $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $t \mapsto x(t, x_0)$ la solution du problème de Cauchy : $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$, $x(0) = g(x_0)$.

2.3. Donner $x(t, x_0)$ en fonction de y puis pour $v \in \mathbb{R}^n$, donner $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0) \cdot v$ en fonction $\frac{\partial y}{\partial y_0}$.

2.4. De quel problème de Cauchy est solution $X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0) \cdot v$?

▷ Exercice 3 (3 points).

3.1. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer l'exponentielle de A , c'est-à-dire e^A .

3.2. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer l'exponentielle de A . Dans le calcul de e^A , vous ne ferez apparaître que les puissances 0 et 1 de la matrice A , c'est-à-dire la matrice identité et A . Les autres puissances de A ne doivent pas apparaître.

▷ **Exercice 4** (8 points). On considère la méthode à un pas suivante

$$x_1 = x_0 + h \left(\alpha f(t_0, x_0) + \beta f \left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0) \right) + \gamma f(t_0 + h, x_0 + h f(t_0, x_0)) \right).$$

4.1. Montrer que c'est un schéma de Runge-Kutta, autrement dit donner les k_i , le nombre d'étages et les coefficients du tableau de Butcher de la table 1.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

4.2. On donne les tableaux de Butcher pour les schémas d'Euler, du point milieu et des trapèzes :

$\begin{array}{c c} 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline \text{Euler} & \end{array}$	$\begin{array}{c cc} 0 & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \\ \hline \text{point milieu} & & \end{array}$	$\begin{array}{c cc} 0 & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ \hline \text{trapèze} & & \end{array}$
---	---	--

Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on

- la méthode d'Euler ;
- la méthode du point milieu ;
- la méthode des trapèzes ?

4.3. Quelles relations doivent satisfaire le triplet (α, β, γ) pour que la méthode soit

- consistante ;
- d'ordre ≥ 1 ;
- d'ordre ≥ 2 ?

On effectuera les calculs dans le cas où $x(t) \in \mathbb{R}$.

4.4. On considère maintenant dans \mathbb{R} le problème de Cauchy : $\dot{x}(t) = x(t)$, $x(t_0) = x_0$. Donner x_1 en fonction de x_0 et de h . En déduire que cette méthode ne peut être d'ordre 3.