



Examen

Durée 1H45.

Documents autorisés : une feuille recto-verso écrite à la main.

Nota bene : les parties I et II sont à rendre sur des copies séparées.

Remarque : le barème prévisionnel est donné pour chaque exercice.

Partie I

▷ **Exercice 1** (10 points). Soit le problème linéaire-quadratique suivant :

$$(LQ) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(u(t)^T R u(t) + x(t)^T Q x(t) \right) dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p., } \quad x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_f > 0$ sont fixés, où A , B , R et Q sont des matrices constantes de dimensions adaptées, et où R est **symétrique définie positive** et Q est **symétrique semi-définie positive**.

1.1. Donner le pseudo-hamiltonien $H(x, p, p^0, u)$ associé au problème (LQ).

1.2. Donner la dynamique adjointe (issue du PMP) vérifiée par p .

1.3. Donner les conditions de transversalité vérifiées en t_f .

1.4. Montrer que pour tout extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot), p^0)$, $p^0 \neq 0$. On fixera ensuite $p^0 = -1$.

1.5. Montrer que le contrôle optimal vérifie $\bar{u}(x, p) = R^{-1} B^T p^T$ (p est un vecteur ligne).

1.6. Montrer que pour tout extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot), p^0)$, le contrôle $t \mapsto u(t) = \bar{u}(x(t), p(t))$ est continu.

1.7. Indiquer si l'on doit utiliser une méthode de tir simple ou de tir multiple pour la résolution numérique et dire pourquoi.

1.8. On note $z = (x, p)$ et $z(\cdot, x_0, p_0)$ la solution de $\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t), \bar{u}(z(t)))$, $z(0) = (x_0, p_0)$, où $\vec{H} = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x})$. Donner la fonction de tir $S(y)$ associée au problème (LQ).

Soit le problème à valeur terminale (TVP) suivant :

$$\dot{S}(t) = S(t) B R^{-1} B^T S(t) - \left(S(t) A + A^T S(t) + Q \right), \quad S(t_f) = 0.$$

Nous faisons l'hypothèse suivante.

|| **Hypothèse 1.** Il existe une unique solution à (TVP) notée $t \mapsto S(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S(t)$ **symétrique** et définie sur tout l'intervalle $[0, t_f]$.

1.9. Calculer $\frac{d}{dt}(x(t)^T S(t)x(t))$ en fonction de $x(t)$, $S(t)$, $\dot{S}(t)$, A , B et $u(t)$. On pourra omettre l'argument t dans ce calcul et les calculs suivants.

1.10. Montrer que l'on peut écrire $J(u(\cdot))$ sous la forme suivante (on omet t) :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(x^T (SBR^{-1}B^T S)x + u^T Ru + 2u^T B^T Sx \right) dt + \frac{1}{2} x(0)^T S(0)x(0).$$

1.11. Montrer que

$$x^T (SBR^{-1}B^T S)x + u^T Ru + 2u^T B^T Sx = (u + R^{-1}B^T Sx)^T R(u + R^{-1}B^T Sx).$$

1.12. En déduire l'expression du contrôle optimal $u^*(t, x)$ en fonction de R , B , $S(t)$ et x et en déduire $J(u^*)$ la valeur minimale du critère.

Partie II

▷ **Exercice 2** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_2) \quad \begin{cases} J(u(\cdot), t_f) := t_f + \int_0^{t_f} \left(x(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = 0, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

avec $x_f > 0$ donné. Résoudre le problème (pour le cas normal : $p^0 = -1$) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.

Rappel : La solution de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 0,$$

s'écrit sous la forme

$$y(t) = \alpha \cosh(t) + \beta \sinh(t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

ou bien de manière équivalente

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

car

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Pour mémoire on a également

$$\operatorname{argsh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad z \in \mathbb{R}.$$

▷ **Exercice 3** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_3) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := x(t_f) \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = -x(t)u(t) + \frac{1}{2}u(t)^2, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $x_0 > 0$ et $t_f > 0$ donnés. Résoudre le problème (pour le cas normal : $p^0 = -1$) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. On montrera que $p(t) < 0$, $t \in [0, t_f]$, où p désigne l'état adjoint associé à x .