



## Examen : durée 1h30.

**Documents autorisés : toute feuille écrite à la main. Le polycopié n'est pas autorisé.**

▷ **Exercice 1** (6 points). Soit le problème d'optimisation en dimension finie

$$\min_{x,y} f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad h(x,y) = 0_{\mathbb{R}^m}, \quad (1)$$

avec  $h(x,y) := Ax - y$  et  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . On suppose  $f \in C^1$ .

**1.1.** Montrer que l'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

On note  $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda^T h(x,y)$  le lagrangien associé, avec  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ .

**1.2.** Montrer à l'aide de la CN1 d'optimalité que si  $(x^*, y^*)$  est solution de (1), alors :

$$\nabla_x f(x^*, y^*) + A^T \nabla_y f(x^*, y^*) = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (2)$$

**1.3.** On suppose l'existence d'une solution  $(x^*, y^*)$ . Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction  $\varphi(x)$  telle que  $h(x, \varphi(x)) = 0$  au voisinage de  $x^*$ . Que vaut  $\varphi'(x)$  ? Que vaut  $\varphi(x)$  ?

On pose  $g(x) := f(x, \varphi(x))$  au voisinage de  $x^*$ .

**1.4.** Montrer que  $x^*$  est solution du problème sans contraintes

$$\min_x g(x) : x \in \mathbb{R}^n$$

et retrouver l'équation (2) à l'aide de la CN1 d'optimalité pour ce nouveau problème.

▷ **Exercice 2** (3 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := g(x(t_f)) \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p., } \quad x(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_f > 0$  sont fixés, et où  $f$  et  $g$  sont deux applications lisses. Soit  $(x, p, p^0, u)$ ,  $p^0 = -1$ , une BC-extrémale (*i.e.* une solution aux conditions nécessaires) normale.

On fait l'hypothèse suivante :  $\exists$  une fonction lisse  $u_s(x, p)$  t.q. :  $\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0 \Leftrightarrow u = u_s(x, p)$ .

**2.1.** Montrer que  $\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}_s(z(t))$ , où  $z := (x, p)$ ,  $H_s(z) := H(z, u_s(z))$  et  $\overrightarrow{H}_s := (\partial_p H_s, -\partial_x H_s)$ .

**2.2.** Donner la condition de transversalité vérifiée par  $p(t_f)$  et définir la fonction de tir  $S(y)$  associée à (P) : vous préciserez  $y$ ,  $S(y)$  et leurs dimensions, et vous utiliserez une notation claire pour définir  $S(y)$  qui fait apparaître le temps, la condition initiale...

▷ **Exercice 3** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(t_f, u(\cdot)) := t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x(t)^2 + u(t)^2) dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = 0, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

avec  $x_f > 0$  donné. Calculer la BC-extrémale du problème.

**Rappel :** La solution de l'équation différentielle  $\ddot{y}(t) - y(t) = 0$ , s'écrit sous la forme  $y(t) = \alpha \cosh(t) + \beta \sinh(t)$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , ou bien de manière équivalente  $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , car

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Pour mémoire on a également  $\operatorname{argsh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

▷ **Exercice 4** (6 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(q_0, u(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u(t)\|^2 dt \longrightarrow \min, \\ \dot{q}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad q(0) = q_0, \\ q_0 \in \mathbb{S}^1, \quad q(t_f) = q_1, \end{cases}$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ , où  $q := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et où  $q_1 := (3, 0)$  et  $t_f > 0$  sont fixés. On rappelle que  $\mathbb{S}^1$  est la sphère de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1.

**4.1.** Dessiner dans le plan  $(x, y)$  les contraintes initiales  $q_0 \in \mathbb{S}^1$  et finales  $q(t_f) = q_1$ , la trajectoire solution  $q(\cdot)$ , *i.e.* la trajectoire qui minimise la longueur entre  $q(0) = q_0$  et  $q(t_f) = q_1$  et qui respecte les contraintes. Tracer l'espace tangent aux contraintes initiales au point  $q(0)$ .

**4.2.** Écrire les conditions initiales  $q_0 \in \mathbb{S}^1$  sous la forme  $c(q_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$  et préciser  $m$ .

Soit  $(q, p, p^0, u)$  une BC-extrémale.

**4.3.** Montrer que la BC-extrémale est normale. On fixe alors  $p^0 = -1$ .

**4.4.** Montrer à l'aide des conditions de transversalité que  $p_0 := p(0)$  est orthogonal à l'espace tangent aux contraintes au point  $q_0$ , *i.e.* à  $T_{q_0}\mathbb{S}^1$ . Vous rappellerez comment on calcule l'espace tangent à une sous-variété différentielle donnée comme la préimage d'une submersion.

**4.5.** Calculer la BC-extrémale : montrer que  $q_0 = q_1/\|q_1\|$ , donner  $p_0$ , et calculer la longueur

$$\int_0^{t_f} \|u(t)\| dt.$$

**4.6.** Dédurre des questions précédentes que  $\dot{q}(0)$  est orthogonal à  $T_{q_0}\mathbb{S}^1$  et vérifier votre dessin à la question 1.