



Examen

Durée 1H45.

Documents autorisés : une feuille recto-verso écrite à la main.

Nota bene : les parties I et II sont à rendre sur des copies séparées.

Remarque : Le barème prévisionnel est donnée pour chaque exercice.

Partie I

▷ **Exercice 1.** Soient $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_f \in \mathbb{R}^2$ et $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application lisse. Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_1) \quad \begin{cases} J(u(\cdot), t_f) := t_f \longrightarrow \min, & t_f > 0, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, & x(t_f) = x_f. \end{cases}$$

Soient \bar{t}_f le temps minimal avec $\bar{u}(\cdot) \in L^\infty([0, \bar{t}_f], \mathbb{R})$ un contrôle optimal, et soient $\bar{x}(\cdot)$ la trajectoire associée, $\bar{p}(\cdot)$ l'état adjoint associé et $\bar{p}^0 \leq 0$ la variable duale du coût associée.

1.1. (2 points). Dédurre du principe du maximum de Pontryagin les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par la BC-extrémale $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot), \bar{p}^0, \bar{u}(\cdot), \bar{t}_f)$ solution du problème (P_1) .

1.2. (2 points). En déduire que $\bar{p}(\cdot)$ ne peut pas s'annuler.

On définit l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1. La dynamique s'écrit $f(x, u) = f_0(x) + u f_1(x)$. Il existe de plus un sous-intervalle $I \subset [0, \bar{t}_f]$ d'intérieur non vide tel que pour tout $t \in I$ ⁽¹⁾ :

$$H_1(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) := \langle \bar{p}(t), f_1(\bar{x}(t)) \rangle = 0$$

et

$$\{H_1, \{H_0, H_1\}\}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) \neq 0,$$

où $H_0(x, p) := \langle p, f_0(x) \rangle$ et $\{H_0, H_1\}(x, p) := dH_1(x, p) \cdot \vec{H}_0(x, p)$ est le crochet de Poisson entre H_0 et H_1 .

1.3. Supposons l'hypothèse 1 vérifiée et notons $\bar{z}(\cdot) := (\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$.

1.3.1. (1 point). Montrer que $\{H_0, H_1\}(\bar{z}(t)) = 0$ pour tout $t \in I$.

1.3.2. (1 point). Montrer que $\bar{u}(t) = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}(\bar{z}(t))}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}(\bar{z}(t))}$ pour tout $t \in I$.

1. On rappelle que $\bar{p}(t)$ peut s'identifier à un vecteur de \mathbb{R}^n , où n est la dimension de l'état. On peut donc écrire $H_1(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) = (\bar{p}(t) | f_1(\bar{x}(t)))$ à l'aide du produit scalaire usuel et alors $\vec{H}_1 = (\nabla_p H_1, -\nabla_x H_1)$.

1.4. Soient Φ_0 et Φ_1 deux applications de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} telles que $\Phi_i(x, p) := (p | F_i(x))$, $i \in \{0, 1\}$, avec F_i deux applications lisses. Soient x, p, v_x et v_p dans \mathbb{R}^n .

1.4.1. (1 point). Calculer

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(x, p) \cdot v_x, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial p}(x, p) \cdot v_p, \quad \nabla_x \Phi_0(x, p) \quad \text{et} \quad \nabla_p \Phi_0(x, p).$$

1.4.2. (1 point). Montrer que $\{\Phi_0, \Phi_1\}(x, p) = (p | F_2(x))$ et donner $F_2(x)$.

On suppose l'hypothèse 1 vérifiée pour la suite de l'exercice.

1.5. (2 points). Montrer que pour tout $t \in I$, $f_1(\bar{x}(t))$ et $f_2(\bar{x}(t))$ sont colinéaires, avec f_2 défini par $\{H_0, H_1\}(x, p) = (p | f_2(x))$.

1.6. (2 points). Soient $a > 0$ et $b > 0$, $a \neq b$. Supposons la dynamique du système donnée par :

$$\dot{x}_1(t) = -a x_1(t) - u(t) x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = b(1 - x_2(t)) + u(t) x_1(t).$$

Montrer que pour tout $t \in I$, $\bar{x}_1(t) = 0$ ou $\bar{x}_2(t) = \frac{b}{2(b-a)}$.

Partie II

▷ **Exercice 2.** Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_2) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := \int_0^1 \left(\frac{u(t)^2}{x(t)^2} - \ln(x(t)^2) \right) dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 1, \quad x(1) = e. \end{cases}$$

On fera l'hypothèse suivante : $\forall t \in [0, 1], x(t) \neq 0$. On ne considère que le cas normal et on fixe la variable duale du coût : $p^0 = -\frac{1}{2}$. Soit $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ une BC-extrémale du problème (P_2) .

2.1. (3 points). Donner le hamiltonien $H(x, p, u)$ du problème (P_2) , l'équation différentielle vérifiée par $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$ et le contrôle optimal $\bar{u}(\cdot)$.

2.2. (1 point). Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on peut écrire $\bar{p}(t) \bar{x}(t)$ sous la forme $a t + b$, avec a et b deux réels à déterminer ou donner en fonction de $\bar{p}(0)$.

2.3. (1 point). Donner les expressions de $\bar{x}(\cdot)$ et $\bar{p}(\cdot)$ en fonction de t et $\bar{p}(0)$ et en déduire $\bar{p}(0)$.

▷ **Exercice 3.** (5 point).

Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_3) \quad \begin{cases} J(u(\cdot), t_f) := \int_{-2}^{t_f} \sqrt{1 + u(t)^2} dt \longrightarrow \min, \quad t_f > -2, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [-2, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(-2) = 0, \quad c(t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

avec $c(t_f, x_f) = x_f - t_f^2$. Résoudre le problème (pour le cas normal : $p^0 = -1$) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. On montrera que t_f est solution d'une équation polynomiale de degré trois.