



## Sujet d'examen – Contrôle optimal

### Consignes.

- Document autorisé : une feuille A4 recto-verso écrite à la main ;
- Durée : 1h30.

### Partie 1 (Barème prévisionnel : 10 points).

▷ **Exercice 1** (7 points). On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f],$$

où  $q(\cdot)$  et  $u(\cdot)$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , sous les conditions aux limites  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$  ( $q_0$  et  $\dot{q}_0$  sont fixés),  $\dot{q}(t_f) = 0$  et  $q(t_f)$  libre.

**1.1.** Mettre la dynamique sous la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  en posant  $x \stackrel{\text{def}}{=} (q, \dot{q})$ , avec  $f$  que l'on précisera.

**1.2.** Écrire le pseudo-hamiltonien du problème.

Soit  $(x, p, p^0, u)$  une BC-extrémale, c-a-d une solution du Principe du Maximum de Pontryagin.

**1.3.** Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint  $p = (p_1, p_2)$ .

**1.4.** Montrer que  $p_2$  ne s'annule jamais et que  $u$  est constant.

▷ **Exercice 2** (3 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min J(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} g(x(t_f)), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_f > 0$  sont fixés, et où  $f$  et  $g$  sont deux applications lisses. Soit  $(x, p, p^0, u)$  une BC-extrémale telle que  $p^0 = -1$ .

On fait l'hypothèse suivante :  $\exists$  une fonction lisse  $u_s(x, p)$  t.q. :  $\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0 \Leftrightarrow u = u_s(x, p)$ .

**2.1.** Montrer que  $\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}_s(z(t))$ , où  $z \stackrel{\text{def}}{=} (x, p)$ ,  $H_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} H(z, u_s(z))$  et  $\overrightarrow{H}_s \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_p H_s, -\partial_x H_s)$ .

**2.2.** Donner la condition de transversalité vérifiée par  $p(t_f)$  et définir la fonction de tir  $S(y)$  associée à  $(P)$  : vous préciserez  $y$ ,  $S(y)$  et leurs dimensions, et vous utiliserez une notation claire pour définir  $S(y)$  qui fait apparaître le temps, la condition initiale...

**Partie 2** (Barème prévisionnel : 10 points. On prendra la note max entre cette partie et le devoir).

▷ **Exercice 3** (6 points). On considère le problème de contrôle optimal sous la forme de Bolza suivant que l'on notera (LQ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} g(x(t_f)) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u(t)^T R u(t) + x(t)^T Q x(t)) dt \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \end{array} \right.$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_f > 0$  sont fixés, où l'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , le contrôle  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , où  $A$ ,  $B$ ,  $R$  et  $Q$  sont des matrices constantes de dimensions adaptées et où  $R$  est symétrique définie positive et  $Q$  est symétrique semi-définie positive. La fonction  $g$  est suffisamment régulière.

**3.1.** Donner le pseudo-hamiltonien  $H(x, p, p^0, u)$  associé au problème (LQ).

**3.2.** Soit  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  la BC-extrémale (elle est unique) du problème (LQ).

- Donner la dynamique vérifiée par le vecteur adjoint  $p(\cdot)$ .
- Donner la condition de transversalité au temps final vérifiée par le vecteur adjoint.
- Montrer que  $p^0 = -1$ .
- Montrer que le contrôle vérifie  $u(t) = R^{-1} B^T p(t)^T$  (ici  $p(t)$  est un vecteur ligne).

**3.3.** Supposons que l'on puisse écrire  $p(t)$  sous la forme  $p(t) = x(t)^T S(t)$  avec  $S(t)$  une matrice symétrique. Montrer que nécessairement la matrice  $S$  vérifie l'équation différentielle (appelée équation de Riccati) à valeur finale

$$\dot{S}(t) = Q - (A^T S(t) + S(t) A + S(t) B R^{-1} B^T S(t)), \quad x(t_f)^T S(t_f) = -g'(x(t_f)).$$

**Remarque.** On peut considérer  $p(t)$  comme un vecteur colonne pour les calculs et omettre l'argument de temps  $t$ .

▷ **Exercice 4** (4 points). On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} x_1(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt \\ \dot{x}(t) = (x_2(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = (0, 0). \end{array} \right.$$

Dans ce problème,  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  et  $u(t) \in \mathbb{R}$ . On cherche ici à maximiser la distance parcourue  $x_1(t_f)$  tout en minimisant l'énergie dépensée. Soit  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  la BC-extrémale du problème ci-dessus. Montrer que

$$p(0) = \frac{1}{2}(1, t_f), \quad p^0 = -1, \quad u(t) = \frac{1}{2}(t_f - t), \quad x_1(t_f) = \frac{t_f^3}{6}.$$