



Examen

Durée 2H. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

Nota bene : la Partie II est à rendre sur des copies séparées de la Partie I.

Partie I

Soient $t_f > 0$, $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ fixés, $m < n$, et soient $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ les applications vérifiant les hypothèses de régularité habituelles. On considère les deux problèmes suivants :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \dot{q}(t) = F(q(t), u(t)), \\ q(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ q(0) = q_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$(P_1) \quad \begin{cases} \max \int_0^{t_f} f^0(q(s), u(s)) ds \\ \dot{q}(t) = F(q(t), u(t)), \\ q(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_1, \end{cases} \quad t \in [0, t_f],$$

- ▷ **Exercice 1** (2 points). Écrire les conditions nécessaires vérifiées par les solutions de (P_1) .
- ▷ **Exercice 2** (3 points). On rappelle que une *extremale* d'un problème de contrôle est une solution $(x(t), p(t))$ du système hamiltonien associé. Expliquer la signification d'extrémales singulières de (P_0) sur $[0, t_f]$ (i.e. extrémales correspondant au contrôle *singulier* sur $[0, t_f]$) dans le contexte du problème (P_1) .
- ▷ **Exercice 3** (5 points). Dans (P_1) on pose $n = 2$, $m = 1$, $q = (x, y)$ et

$$F(x, y, u) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ u \end{pmatrix}, \quad f^0(x, y, u) = -\frac{u^2}{2}.$$

Trouver les contrôles associés aux extrémales *normales* et *abnormales* et écrire les équations hamiltoniennes correspondant à ces deux cas en éliminant le contrôle des équations.

Partie II

- ▷ **Exercice 4** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant (avec les notations habituelles) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min t_f + \int_0^{t_f} (x^2(t) + u^2(t)) dt \\ \dot{x}(t) = u(t) \\ u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_f > 0 \text{ fixé} \\ t_f \text{ est libre} \end{array} \right.$$

Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.

Rappel : La solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 0$$

s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \alpha \cosh t + \beta \sinh t, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

ou bien de manière équivalente :

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

car

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Pour mémoire on a également

$$\operatorname{argsh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad z \in \mathbb{R}.$$

- ▷ **Exercice 5** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min -x(t_f) + \int_0^{t_f} (u(t) - x(t)) dt \\ \dot{x}(t) = -2x(t) + \frac{3}{2}u(t) \\ u(t) \in [0, a], \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad x(t_f) \text{ libre} \end{array} \right.$$

où $a > 0$ et $t_f = \frac{\ln 3}{2}$ sont fixés. Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.