



## Examen

**Durée 1H45.**

**Documents autorisés : une feuille recto-verso écrite à la main.**

**Nota bene :** les parties I et II sont à rendre sur des copies séparées.

**Remarque :** le barème prévisionnel est donné pour chaque exercice.

### Partie I

▷ **Exercice 1** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_1) \quad \begin{cases} J(t_f, u(\cdot)) := \int_0^{t_f} u(t)^2 dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = 0, \\ c(t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

avec  $c(t_f, x_f) = x_f - 2t_f - 10$  et où  $t_f > 0$  est libre. Résoudre le problème en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.

▷ **Exercice 2** (5 points). Soit le problème de contrôle optimal (non autonome) suivant :

$$(P_2) \quad \begin{cases} J(x_0, u(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (t u(t) + x(t))^2 dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) = 0, \end{cases}$$

avec  $0 < t_0 < t_f$  fixés. Résoudre le problème (pour le cas normal :  $p^0 = -1$ ) en appliquant le principe du maximum de Pontryagin.

**Rappel :** La solution de l'edo linéaire  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$  vérifiant  $x(t_0) = x_0$ , s'écrit  $x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$ , où  $R(t, t_0)$  est la solution de l'équation homogène  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .

Vous montrerez que l'état  $x(\cdot)$  vérifie une edo linéaire dont la résolvante  $R(t, t_0) = t_0/t$ .

### Partie II

**Remarque :** Le principe du maximum de Pontryagin (PMP) n'a pas à être redémontré !

▷ **Exercice 3** (4 points). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_3) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := g(x(t_f)) \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_f > 0$  sont fixés, et où  $f$  et  $g$  sont deux applications lisses. Soit  $(x, p, p^0, u)$ ,  $p^0 = -1$ , une BC-extrémale (solution du PMP) normale.

**3.1.** (1 point). Montrer que pour tout  $t \in [0, t_f]$  p.p. :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)) = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x(t), p(t), u(t)) \leq 0,$$

où  $H$  est le pseudo-hamiltonien, associé à  $(P_3)$ , que vous préciserez.

On fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.** Il existe une fonction lisse  $u_s(x, p)$  t.q. :  $\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0 \Leftrightarrow u = u_s(x, p)$ .

**3.2.** (1 point). Montrer que  $\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}_s(z(t))$ , où  $z := (x, p)$  et  $H_s(z) := H(z, u_s(z))$ .

**3.3.** (1 point). Donner la condition de transversalité vérifiée par  $p(t_f)$ .

**3.4.** (1 point). Définir la fonction de tir simple  $y \mapsto S(y)$  associée à  $(P_3)$ . Vous préciserez  $y$ ,  $S(y)$  et leurs dimensions.

▷ **Exercice 4** (6 points). Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $x_f \in \mathbb{R}^2$  et  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application lisse. Soit le problème de contrôle optimal (**en dimension 2**) suivant :

$$(P_4) \quad \begin{cases} J(t_f, u(\cdot)) := t_f \longrightarrow \min, & t_f > 0, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p., } \quad x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_f. \end{cases}$$

Soit  $(x, p, p^0, u)$  une BC-extrémale avec  $t_f$  le temps minimal associé.

**4.1.** (2 points). Montrer que  $p$  ne peut pas s'annuler.

On fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 2.** La dynamique s'écrit  $f(x, u) = F_0(x) + u F_1(x)$ . Il existe de plus  $I \subset [0, t_f]$  d'intérieur non vide tel que pour tout  $t \in I$  :

$$H_1(z(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \{H_1, \{H_0, H_1\}\}(z(t)) \neq 0,$$

où  $H_i(z) := (p | F_i(x))$ ,  $i = 0, 1$ ,  $z := (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , avec  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$  et où

$$\{H_0, H_1\}(z) := H'_1(z) \cdot \overrightarrow{H_0}(z) = \frac{\partial H_1}{\partial x}(z) \nabla_p H_0(z) - \frac{\partial H_1}{\partial p}(z) \nabla_x H_0(z).$$

**4.2.** (1 point). Montrer que  $\{H_0, H_1\}(z(t)) = 0$  pour tout  $t \in I$ .

**4.3.** (1 point). Montrer que  $u(t) = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z(t))}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}(z(t))}$  pour tout  $t \in I$ .

**4.4.** (1 point). Montrer que  $\{H_0, H_1\}(z) = (p | F_2(x))$  où vous préciserez  $F_2(x)$  et  $\nabla_x H_0(z)$ .

**4.5.** (1 point). Dédurre des questions 4.1, 4.2 et 4.4, que  $F_1(x(t))$  et  $F_2(x(t))$  sont colinéaires pour tout  $t \in I$ .