

# Intégration

## Chapitre 6 : Intégration sur les produits (non évalué)

Olivier COTS, Serge GRATTON & Ehouarn SIMON

9 décembre 2021

Le but de ce chapitre 6 est :

- de poser le cadre des intégrales "multiples" depuis la théorie construite dans les chapitres précédents.

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

## Chapitre 6 : Intégration sur les produits (non évalué)

- 6.1. Tribu et mesure produits
- 6.2. Théorèmes de Fubini
- 6.3. Changement de variables

$$\int_E f \, d\mu$$

## Chapitre 6 : Intégration sur les produits (non évalué)

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

**Définition 6.1.1 – Tribu produit**

Soient  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables.

On appelle **tribu produit** sur  $E_1 \times E_2$ , que l'on note  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme  $A_1 \times A_2$  avec  $\forall i \in \{1, 2\}, A_i \in \mathcal{A}_i$  :

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

Le couple  $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  est appelé **espace mesurable produit**.

**Remarque 6.1.1.** En général,  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$  n'est pas une tribu.

**Proposition 6.1.2 – Cas borélien**

Soient  $(E_1, \mathcal{O}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{O}_2)$  deux espaces topologiques.<sup>1</sup>

On a

- i)  $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ .
- ii) Si  $E_1$  et  $E_2$  sont à bases dénombrables d'ouverts, alors

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$

► Admis. ■

**Corollaire 6.1.3 – Cas particulier  $E_i = \mathbb{R}$** 

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \geq 2, \quad \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}} =: \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

► Idée :  $\mathbb{R}$  est à base dénombrable d'ouverts (admis). ■

1. Une topologie  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$  contient  $\emptyset$  et  $E$ , et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

**Remarque 6.1.2.**

- On rappelle que si  $(E, \mathcal{O})$  est un espace topologique alors par définition

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}).$$

- $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$  est une tribu sur  $E_1 \times E_2$  : c'est la plus petite tribu contenant les ouverts de  $E_1 \times E_2$ .
- $E$  est à base dénombrable d'ouverts s'il existe une famille dénombrable d'ouverts de  $E$ , noté  $(O_n)$ , telle que tout ouvert  $O$  de  $E$  soit une réunion (au plus dénombrable) d'éléments de  $(O_n)$ .

## Théorème 6.1.4 – Mesure produit

Soient  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés.

On suppose que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont  $\sigma$ -finies sur  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{A}_2)$  respectivement.<sup>2</sup>

Alors, il **existe une unique mesure**  $m$  sur  $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \quad m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

Cette mesure est  $\sigma$ -finie et est appelée **mesure produit**. On la note  $\mu_1 \otimes \mu_2 := m$ .

► Admis. ■

## Remarque 6.1.3.

- Le théorème précédent est faux lorsque  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  n'est pas  $\sigma$ -finie.
- Cas  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  : la mesure  $\lambda \otimes \lambda$  mesure les aires,  $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \lambda^{\otimes 3}$  les volumes, etc. La mesure de Lebesgue  $\lambda_d$  sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  est aussi la mesure produit  $\lambda_1^{\otimes d}$ .

2.  $\forall i \in \{1, 2\}, \exists (A_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n^i \in \mathcal{A}_i, \mu_i(A_n^i) < +\infty$  et  $E_i = \bigcup_n A_n^i$ .

## Chapitre 6 : Intégration sur les produits (non évalué)

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

### Théorème 6.2.1 – Fubini-Tonelli

Soient  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés (les mesures sont  $\sigma$ -finies).

Soit  $f: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, +\infty]$  mesurable positive.

On définit les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sur  $E_1$  et  $E_2$  respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y), \quad \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x).$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient

$$\int_{E_1} \phi d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi d\mu_2$$

(et cette quantité  $\in [0, +\infty]$ ).

**Remarque 6.2.1.** On retient que pour des fonctions mesurables positives, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

**Exemple 6.2.1.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad (\text{Fubini-Tonelli}) \\ &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left( \int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \end{aligned}$$

**Exemple 6.2.1.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \textbf{(Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left( \int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left( \int_0^{1-y} e^{-x} \, dx \right) d\lambda(y) \quad \textbf{(Eq. R-L sur un segment)} \end{aligned}$$

**Exemple 6.2.1.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \textbf{(Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left( \int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left( \int_0^{1-y} e^{-x} \, dx \right) d\lambda(y) \quad \textbf{(Eq. R-L sur un segment)} \\ &= \int_0^1 e^{-y} \left( 1 - e^{-(1-y)} \right) dy \quad \textbf{(Eq. R-L sur un segment)} \\ &= \int_0^1 e^{-y} - e^{-1} dy = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

**Exemple 6.2.2** (Intervention somme - intégrale).

Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  mesurable positive. Nous supposons dans cet exemple que

$$(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card}).$$

Comme déjà vu, pour toute fonction  $g$  positive sur  $E_2$ ,

$$\int_{E_2} g \, d\mu_2 = \sum_{k \geq 0} g(k) .$$

Par Fubini-Tonelli, nous avons alors

$$\int_{E_1} \left( \sum_{k \geq 0} f(x, k) \right) d\mu_1(x) = \sum_{k \geq 0} \left( \int_{E_1} f(x, k) d\mu_1(x) \right) .$$

### Théorème 6.2.2 – Fubini (ou Fubini-Lebesgue)

Soient  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés (les mesures sont  $\sigma$ -finies).

Soit  $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction mesurable de **signe quelconque**. On définit les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sur  $E_1$  et  $E_2$  respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y), \quad \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x).$$

Si  $f$  est  $\mu_1 \otimes \mu_2$ -intégrable alors  $\phi$  et  $\psi$  sont resp.  $\mu_1$ -intégrable et  $\mu_2$ -intégrable, et vérifient la double égalité

$$\int_{E_1} \phi d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi d\mu_2.$$

**Remarque 6.2.2.** Il est possible de vérifier l'intégrabilité de  $|f|$  par rapport à  $\mu_1 \otimes \mu_2$  par le Théorème de Fubini-Tonelli : il suffit de vérifier que l'intégrale de  $f_1$  ou  $f_2$  est finie.

## Chapitre 6 : Intégration sur les produits (non évalué)

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_E f \, d\mu$$

### Définition 6.3.1 – $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . Un  **$\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme**  $\phi$  de  $U$  dans  $V$  est une bijection  $\phi (U \rightarrow V)$  qui est  $\mathcal{C}^1$  et telle que  $\phi^{-1}$  est également  $\mathcal{C}^1$ .

### Définition 6.3.2 – Matrice Jacobienne

Si  $\phi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $V$  (deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ), on appelle **matrice jacobienne** en  $u := (u_1, \dots, u_d)$ , la matrice

$$J_{\phi}(u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_d}(u) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_d}(u) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_d}(u) \end{bmatrix}.$$

**Théorème 6.3.3 – Inversion globale (cadre  $\mathbb{R}^d$ )**

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Alors  $\phi$  réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V = \phi(U)$  si et seulement si  $\phi$  satisfait les trois conditions suivantes :

- i)  $\phi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ ,
- ii)  $\phi$  est injective,
- iii)  $\forall u \in U, \det(J_\phi(u)) \neq 0$ .

**Remarque 6.3.1.** En pratique, on est souvent confrontés aux cas suivants :

- On sait que  $\phi$  est une bijection de  $U$  sur  $V$  et on connaît  $U, V$  (ouverts) et  $\phi^{-1}$ . Il suffit alors de vérifier que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont  $\mathcal{C}^1$ .
- On ne sait pas inverser  $\phi$ . On applique alors le théorème d'inversion globale. La difficulté réside souvent dans la détermination de  $V = \phi(U)$ .

**Théorème 6.3.4 – Changement de variables**

Soient  $U, V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ .

Soient  $\phi: U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne sur  $V$  et intégrable.

Alors la fonction  $f \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable et

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \, d\lambda.$$

**Remarque 6.3.2.**

- Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans les calculs.
- On a encore

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \, d\lambda.$$

si  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne sur  $V$  et positive (avec  $\phi: U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme).

**Remarque 6.3.3** (Dimension 1 : lien avec le changement de variables (Riemann)). Soient  $]a, b[$  et  $]c, d[$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\phi: ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$  un  $C^1$ -difféomorphisme. On a que  $\phi'$  ne peut s'annuler sur  $]a, b[$  et est de signe constant.

Supposons  $\phi' > 0$ . Alors la formule du changement de variable pour les intégrales de Riemann donne

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b (f \circ \phi)(y) \phi'(y) dy = \int_a^b (f \circ \phi)(y) |\phi'(y)| dy.$$

Si  $\phi' < 0$ , alors

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \int_b^a (f \circ \phi)(y) \phi'(y) dy \\ &= - \int_a^b (f \circ \phi)(y) \phi'(y) dy \\ &= \int_a^b (f \circ \phi)(y) |\phi'(y)| dy. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule du changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue.

**Exemple 6.3.1** (Coordonnées polaires).

Soit

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}_+^* \times ]0, \frac{\pi}{2}[ &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (\rho, \theta) &\longmapsto \phi(\rho, \theta) := (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))\end{aligned}$$

L'application  $\phi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme (admis), de matrice Jacobienne

$$\forall (\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, \frac{\pi}{2}[, \quad J_\phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$|\det J_\phi(\rho, \theta)| = |\rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta)| = |\rho|.$$

Soit

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow e^{-(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

$f$  est mesurable (car continue) et positive.

**Exemple 6.3.1** (Coordonnées polaires).

D'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{[0, +\infty]} \int_{[0, +\infty]} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0, +\infty]} e^{-x^2} \left( \int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \left( \int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) \times \int_{[0, +\infty]} e^{-x^2} d\lambda(x) \\ &= \left( \int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right)^2. \end{aligned}$$

**Exemple 6.3.1** (Coordonnées polaires).

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\ &= \int_{]0, +\infty[ \times ]0, \pi/2[} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta) \\ &= \int_{[0, +\infty] \times [0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta). \end{aligned}$$

**Exemple 6.3.1** (Coordonnées polaires).

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\
 &= \int_{]0, +\infty[ \times ]0, \pi/2[} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta) \\
 &= \int_{[0, +\infty] \times [0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta).
 \end{aligned}$$

Par Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{[0, +\infty]} \left( \int_{[0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d\lambda(\theta) \right) d\lambda(\rho). \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} d\lambda(\rho)
 \end{aligned}$$

**Exemple 6.3.1** (Coordonnées polaires).

Or, l'intégrale de Riemann impropre  $\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$  est convergente (et vaut  $1/2$ ), avec  $\rho \rightarrow \rho e^{-\rho^2}$  mesurable positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

Il vient que  $\rho \rightarrow \rho e^{-\rho^2}$  est Lebesgue-intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} d\lambda(\rho) = \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\left( \int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

soit

$$\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Exemple 6.3.2** (Convolution).

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et intégrables. Rappelons que la convolée de  $f$  et  $g$  est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda(y).$$

Montrons que cette fonction est bien définie (c'est à dire que  $f \star g < \infty$  p.p.).

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ (\text{par Fubini-Tonelli}) \quad &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y). \end{aligned}$$

**Exemple 6.3.2** (Convolution).

Pour  $y$  fixé, soit le changement de variable en dimension 1 ( $u = x - y$ ,  $x = u + y$ ) :

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & u \rightarrow u + y \end{array}$$

$\phi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et  $\forall u \in \mathbb{R}, |\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$ .

Il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x - y)| \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(u)| \, d\lambda(u).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| \, d\lambda(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}} |g(u)| \, d\lambda(u) \right) d\lambda(y) \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |g(u)| \, d\lambda(u) \right) \times \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, d\lambda(y) \right) \\ (f \text{ et } g \text{ intégrables}) &< +\infty. \end{aligned}$$

Il vient  $|f \star g|$  est finie  $\mu$ -p.p., et donc  $f \star g$  est finie  $\mu$ -p.p.

**Exemple 6.3.2** (Convolution).

Fixons  $x$  et opérons un changement de variable  $y = x - u$  dans l'intégrale :

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & u \rightarrow x - u \end{array}$$

$\phi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et  $\forall u \in \mathbb{R}, |\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) \, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u) \, d\lambda(u)$$

Finalement,

$$f \star g = g \star f .$$