



TD 3 – Intégrales de fonctions mesurables positives (suite)

- ▷ **Exercice 1.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints et de réunion $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit f mesurable de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive. Montrer que

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 2.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

2.1. Montrer que :

$$\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

2.2. Montrer que si $\exists N \in \mathbb{N}$, t.q. $\int_E f_N \, d\mu < +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 3.** Soit $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$ un espace mesuré avec λ la mesure de Lebesgue. On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n: \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f_n(x) := \frac{n e^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 x^2}} \end{aligned}$$

mesurable de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \, d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Indication : on admettra que $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-x}}{x} \, d\lambda = +\infty$.