

# Intégration

## Chapitre 7 : Perspectives probabilistes (compléments)

Olivier COTS, Serge GRATTON & Ehouarn SIMON

23 septembre 2021

Le but de ce chapitre 7 est :

- d'exposer brièvement les liens entre les probabilités, et les théories de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue (A. Kolmogorov).

## Chapitre 7 : Perspectives probabilistes (compléments)

7.1. Cadre mathématique

7.2. Loi discrète

7.3. Loi à densité

$$E[X] = \int_{\Omega} X \, dP$$

## Chapitre 7 : Perspectives probabilistes (compléments)

7.1. Cadre mathématique

7.2. Loi discrète

7.3. Loi à densité

$$E[X] = \int_{\Omega} X \, dP$$

**Définition 7.1.1 – Espace "probabilisé"**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace mesuré avec

- $\Omega$  : espace fondamental de l'épreuve (espace des "éventualités"),
- $\mathcal{A}$  : tribu sur  $\Omega$  des "événements" (ensemble d'éventualités).
- $P$  : mesure de probabilité sur  $\mathcal{A}$ .

**Définition 7.1.2 – Variable aléatoire réelle**

Soit  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

$X$  est une variable aléatoire réelle si  $X$  est mesurable.

**Remarque 7.1.1 (Notations).**

On parlera de v.a.r. pour variable aléatoire réelle. Soit  $X$  une v.a.r.. Alors  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . On adoptera les notations

$$(X \in B) := X^{-1}(B) \text{ et } P(X \in B) := P(X^{-1}(B)).$$

**Définition 7.1.3 – Loi de  $X$** 

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé" et  $X$  une v.a.r. On définit

$$\begin{aligned} P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto P_X(B) := P(X^{-1}(B)). \end{aligned}$$

$P_X$  est une mesure sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , appelé loi de la variable  $X$ .

**Remarque 7.1.2.** La loi de la variable  $X$  est en fait la mesure image de  $P$  par  $X$  (cf. TD 1).

**Définition 7.1.4 – Fonction de répartition**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé" et  $X$  une v.a.r.  $P_X$  est une mesure de probabilité. Elle est caractérisée par ses valeurs sur les intervalles de la forme  $] -\infty, t]$  avec  $t \in \mathbb{R}$ . On définit ainsi sa fonction de répartition, notée  $F_X$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) := P_X(]-\infty, t]) = P(X^{-1}(]-\infty, t])) = P(X \leq t).$$

**Définition 7.1.5 – Espérance mathématique**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé" et  $X$  une v.a.r. positive ou intégrable (c.a.d  $\int_{\Omega} |X| dP < +\infty$ ). On définit l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E[X]$ , par

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP.$$

**Remarque 7.1.3.** Cette formule de l'espérance n'est pas forcément pratique pour son calcul. Il s'agit de l'intégrale sur l'espace fondamental  $\Omega$  vis-à-vis de la mesure  $P$ , ce qui renvoie à un cadre plutôt abstrait. On va donc chercher à se ramener à des espaces mesurés pour lesquels on maîtrise mieux les calculs.

**Théorème 7.1.6 – Mesure image**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé",  $X$  une v.a.r. et  $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\phi(X)$  est intégrable. Alors

$$E[\phi(X)] = \int_{\Omega} \phi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

► Idée : Revenir aux fonctions étagées mesurables positives, puis passer à la limite.

**Corollaire 7.1.7 – Cas particulier**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé" et  $X$  une v.a.r. positive ou intégrable.

On a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$



► (*Preuve du théorème de la mesure image*).

i) On suppose que  $\phi = \mathbb{1}_B$  avec  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .  $\phi$  est mesurable (positive) et on a

$$\phi(X) = \mathbb{1}_B \circ X = \mathbb{1}_{X^{-1}(B)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} E[\phi(X)] &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X^{-1}(B)} dP \\ &= P(X^{-1}(B)) \\ &= P_X(B) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B dP_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X. \end{aligned}$$

ii) On suppose que  $\phi \in \mathcal{M}_+^0$ . On note  $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{B_i}$  avec  $\forall i = 1 : n, a_i \geq 0, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .  
 $\phi$  est mesurable (positive) et on a

$$\begin{aligned} E[\phi(X)] &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i (\mathbb{1}_{B_i} \circ X) \, dP \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} \mathbb{1}_{B_i} \circ X \, dP \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_i} \, dP_X \quad (\text{par } i)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{B_i} \, dP_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi \, dP_X. \end{aligned}$$

iii) On suppose que  $\phi \in \mathcal{M}_+$ .

Alors  $\exists(\phi_n)$  une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives qui converge simplement vers  $\phi$ . D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n dP_X = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

De même, la suite  $(\phi_n(X))$  est une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives qui converge simplement vers  $\phi(X)$ . D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi_n(X) dP = \int_{\Omega} \phi(X) dP.$$

D'après ii), on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{\Omega} \phi_n(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \phi_n dP_X$ . A la limite, il vient

$$E[\phi(X)] = \int_{\Omega} \phi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

iv) On suppose que  $\phi \in \mathcal{M}$ . Le résultat suit en appliquant iii) aux parties positive et négative de  $\phi$ .



## Chapitre 7 : Perspectives probabilistes (compléments)

7.1. Cadre mathématique

7.2. Loi discrète

7.3. Loi à densité

$$E[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} np_n$$

**Définition 7.2.1**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé".  $X$  une v.a.r. est de loi discrète si elle est à valeurs dans une partie au plus dénombrable de  $\mathbb{R}$ . Dans la suite on supposera que  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 7.2.2 – Mesure image**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé",  $X$  une v.a.r. de loi discrète. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(X = n) = P_X(\{n\}).$$

On a

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_n.$$

$P_X$  est ainsi la mesure de probabilité discrète.

► Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned}P_X(B) &= P(X \in B) \\&= P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}) \\&= P(\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B \cap \{n\}\}) \\&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B \cap \{n\}\}) \quad (\text{éléments disjoints 2 à 2}) \\&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cap B} \underbrace{P(X = n)}_{=p_n} \\&= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_B(n) \\&= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_n(B).\end{aligned}$$



**Proposition 7.2.3 – Mesure image**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé",  $X$  une v.a.r. de loi discrète. On a

$$E[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} np_n.$$

De plus,  $\forall \phi$  définie sur  $\mathbb{N}$  et mesurable, on a

$$E[\phi(X)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(n)p_n.$$

► On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n d\delta_n(x) \quad (= \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \int_{\mathbb{R}} x d\delta_n(x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n n \quad (\text{car } \int_{\mathbb{R}} x d\delta_n(x) = n, \text{ cf TD2}) \end{aligned}$$



## Chapitre 7 : Perspectives probabilistes (compléments)

7.1. Cadre mathématique

7.2. Loi discrète

7.3. Loi à densité

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x) \, d\lambda(x)$$



**Définition 7.3.1 – Mesure à densité**

Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

$\mu$  est dite avoir pour densité la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (par rapport à  $\lambda$ ) si

$$\forall \phi \in \mathcal{M}_+, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \phi f \, d\lambda.$$

En particulier  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu(B) = \int_B f \, d\lambda.$

**Remarque 7.3.1.** Soit  $P$  une mesure de probabilité ayant pour densité la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = P(\mathbb{R}) = 1.$$

Dans le **cadre des probabilités**, on dit que  $X$  v.a.r. admet pour densité  $f$  si  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = \int_B f \, d\lambda$ , avec  $f$  mesurable positive telle que  $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 1$ .

C'est un **abus de langage** : ce n'est pas  $X$  qui admet une densité, mais la mesure image  $P_X$ , qui dépend naturellement de  $X$ .

**Proposition 7.3.2 – Mesure image**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace "probabilisé",  $X$  une v.a.r. positive ou intégrable "admettant" une densité  $f$ . On a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x) d\lambda(x).$$

De plus,  $\forall \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\phi(X)$  est intégrable, on a

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x) d\lambda(x).$$

► La preuve est similaire à celle du théorème de la mesure image. ■

**Remarque 7.3.2.** S'étant ramener à l'intégrale vis-à-vis de la mesure de Lebesgue, les calculs se feront en pratique via les lien entre les intégrales de Riemann (impropres) et Lebesgue sur des segments et intervalles. On se ramènera ainsi à

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x) d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx.$$