



TD 3 – Intégrales et théorèmes limites

▷ **Exercice 1.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

1.1. Montrer que : $\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu$.

1.2. Montrer que si $\exists N \in \mathbb{N}$, t.q. $\int_E f_N \, d\mu < +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$.

Remarque. On rappelle que λ est la mesure de Lebesgue.

▷ **Exercice 2.** Justifier que l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann coïncident pour les fonctions suivantes et calculer sa valeur.

2.1. $\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2.2. $e^{-x} \cos(x)$ sur \mathbb{R}_+ .

2.3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R}_+ .

2.4. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,4]}(x) + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]4,+\infty[}(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque. Dans le restant des deux TD, on s'affranchira de la démonstration systématique de l'équivalence entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue.

▷ **Exercice 3.** Pour chacune des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions boréliennes de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} suivantes, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\lambda.$$

3.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

3.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$.

3.3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos x \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

▷ **Exercice 4.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$. On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n: \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f_n(x) := \frac{n e^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 x^2}} \end{aligned}$$

mesurable de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$. Utiliser le lemme de Fatou pour montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \, d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Indication : on admettra que $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-x}}{x} \, d\lambda = +\infty$.