



## TD 4 — Fubini, intégrale à paramètre, changement de variables et espaces $L^p$

- ▷ **Exercice 1.** Soit  $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$  une double suite de réels positifs. Montrer, à l'aide du théorème de Fubini, que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} u_{k,\ell}.$$

**Remarque.** On rappelle que  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue.

- ▷ **Exercice 2.** On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\lambda(x) d\lambda(y)$$

**2.1.** Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à  $I$ .

**2.2.** Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+x^2y} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2}.$$

**2.3.** En déduire que  $I = \frac{\pi^2}{2}$ .

**2.4.** Retrouver ce résultat en utilisant le changement de variables :  $v = x\sqrt{y}$ ,  $t = \sqrt{y}$ .

- ▷ **Exercice 3.** Soit  $F$  la fonction définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} d\lambda(x).$$

**3.1.** Déterminer le domaine de définition de  $F$  (*i.e.* le domaine sur lequel  $F$  existe et est finie) et son domaine de continuité.

**3.2.** Calculer  $F(0)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$ .

- ▷ **Exercice 4.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $1 \leq p < +\infty$ . On dit que  $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ , si

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty.$$

On pose alors

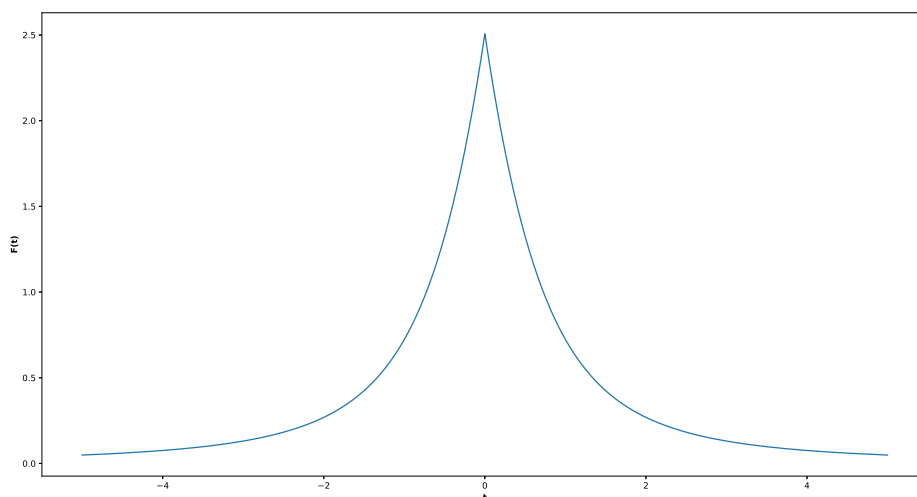
$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de fonctions de  $L^2$  qui convergent vers  $f$  et  $g$  dans  $L^2$ . Montrer que la suite  $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $fg$  dans  $L^1$ .

**Exercice supplémentaire.**

▷ **Exercice 5.** On considère la fonction  $F$  définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)} d\lambda(x).$$



**5.1.** Déterminer le domaine de définition de  $F$  et son domaine de continuité.

**5.2.** Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

**5.3.** Montrer que  $F$  admet une dérivée à droite en 0. Dans le calcul de  $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ , on pourra faire le changement de variable  $x = u^2 t^2$  puis utiliser le théorème de convergence dominée.

**5.4.**  $F$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?