



## TD 2 – Intégrales de fonctions mesurables positives

- ▷ **Exercice 1** (Inégalité de Markov). Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f$  mesurable de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et positive. Montrer que

$$\forall a > 0, \quad \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 2.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une fonction mesurable positive.

**2.1.** On définit

$$\begin{aligned} \mu_f: \mathcal{A} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \mu_f(A) := \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu. \end{aligned}$$

Montrer que  $\mu_f$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ , appelée *mesure de densité  $f$  par  $\mu$* .

**2.2.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  deux à deux disjoints et de réunion  $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . En déduire que

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 3.** Soit  $f$  mesurable de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et positive. Soit  $\delta_0$  la mesure de Dirac en 0 définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  par :

$$\begin{aligned} \delta_0: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \delta_0(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminer  $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$ .

- ▷ **Exercice 4** (Relation de Chasles généralisée pour les fonctions mesurables positives). Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  deux à deux d'intersection de mesure nulle et de réunion  $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Soit  $f$  mesurable positive de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Montrer que

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 5.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

**5.1.** Soit  $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  mesurable positive telle que :

$$\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0.$$

$f$  est-elle intégrable sur  $E$  ?

**5.2.** Réciproquement, est-ce qu'une fonction intégrable  $f$  est finie presque partout, *i.e.* vérifie  $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$  ?