



Sujet d'examen – Intégration et applications

Consignes.

- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Dans tout l'examen, on notera λ la mesure de Lebesgue.

▷ **Exercice 1** (Convolution et transformée de Fourier). Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{-|x|}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.1. Montrer, par un calcul intégral, que

$$f * f(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}$$

Aide : pour $x \geq 0$, on découpera le domaine d'intégration en $] -\infty, 0]$, $[0, x]$, $[x, +\infty[$, et pour $x \leq 0$, on découpera le domaine d'intégration en $] -\infty, x]$, $[x, 0]$, $[0, +\infty[$.

1.2. Calculer explicitement la transformée de Fourier de f .

1.3. Calculer alors à l'aide des points précédents, **et en justifiant l'utilisation des formules appropriées**, la transformée de Fourier de $(1 + |x|)e^{-|x|}$.

▷ **Exercice 2.** On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = |\sin(x)|^{\frac{1}{n}} x e^{-x}. \end{aligned}$$

2.1. On pose $A := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } f_n(x) = 0\}$.

- Déterminer A .
- Justifier $\lambda(A) = 0$ (λ étant la mesure de Lebesgue).

2.2. a) Soit $b \in]0, 1]$. On pose $\varphi(y) := by = e^{y \ln b}$. Montrer que φ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

- Montrer que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge simplement presque partout vers une fonction f (vous donnerez la fonction f et l'ensemble sur lequel la convergence a lieu).

2.3. a) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$ (indiquer pourquoi les fonctions f_n et la fonction f sont mesurables).

- Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$ en utilisant le lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue (vous justifierez le passage d'une intégrale à l'autre).

- ▷ **Exercice 3.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On suppose que $A \in \mathcal{A}$ est un *atome* de \mathcal{A} , c'est-à-dire que A est non vide et que pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$B \subset A \Rightarrow (B = \emptyset \text{ ou } B = A).$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \mu_A: \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu_A(B) := \begin{cases} 1 & \text{si } A \subset B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que μ_A est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .