



Sujet d'examen – Intégration et applications

Consignes.

- Durée : 1h30 ;
- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Les parties 1 (exercices 1 et 2) et 2 (exercices 3 et 4) sont à rendre sur des **copies séparées**.

Partie 1 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants.

▷ **Exercice 1** (Convolution et transformée de Fourier - 5 points). Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{-|x|}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer, par un calcul intégral, que

$$f * f(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}$$

Aide : pour $x \geq 0$, on découpera le domaine d'intégration en $] -\infty; 0]$, $[0; x]$, $[x; +\infty[$, et pour $x \leq 0$, on découpera le domaine d'intégration en $] -\infty; x]$, $[x; 0]$, $[0; +\infty[$.

2. Calculer explicitement la transformée de Fourier de f .
3. Calculer alors à l'aide des points précédents, **et en justifiant l'utilisation des formules appropriées**, la transformée de Fourier de $(1 + |x|)e^{-|x|}$.

▷ **Exercice 2** (Distributions : transformée de Fourier et dérivée - 4 points). Soit T une distribution tempérée ($T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$). On rappelle que

- la transformée de Fourier de T est définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$.
- la dérivée k -ème de T est définie par : $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$.

En utilisant ces définitions ainsi que les relations entre transformée de Fourier et dérivées (au sens des fonctions), montrer que :

1. Dérivée de la transformée : $\forall k \in \mathbb{N}, \widehat{T^{(k)}} = \widehat{(-2j\pi x)^k T}$
2. Transformée de la dérivée : $\forall k \in \mathbb{N}, \widehat{T^{(k)}} = (2j\pi f)^k \widehat{T}$

Partie 2 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants. On peut ne pas justifier le passage de Riemann à Lebesgue sauf si demandé dans la question.

▷ **Exercice 3** (Intégrale de Dirichlet - 8 points). On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

3.1. En justifiant le passage de l'intégrale de Riemann à Lebesgue, calculer $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} d\lambda(t)$, $x > 0$.

3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$f_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[0,n]} e^{-xt} \sin x d\lambda(x) = \frac{1 - te^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n}{1 + t^2} \quad (t \geq 0).$$

3.3.

- a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .
- b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ .
- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda$.

3.4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,n]} \frac{\sin x}{x} d\lambda = \frac{\pi}{2}$.

▷ **Exercice 4** (6 points). On pose

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \mu, \sigma) &\longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

et on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda = \sqrt{\pi}$.

4.1. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. On pose sur \mathbb{R} : $f_{\mu,\sigma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, \mu, \sigma)$. Justifier la mesurabilité de cette fonction de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4.2. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. En exploitant un changement de variable pertinent, montrer que la fonction $f_{\mu,\sigma}$ est intégrable sur \mathbb{R} et donner la valeur de

$$I(\mu, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f_{\mu,\sigma} d\lambda.$$

4.3. Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction

$$\mu \mapsto \mathcal{E}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x f_{\mu,\sigma}(x) d\lambda(x)$$

est définie sur \mathbb{R} . Donner les valeurs de $\mathcal{E}(0)$ puis $\mathcal{E}(\mu)$ pour μ quelconque.