



## Sujet d'examen – Intégration et applications

### Consignes.

- Durée : 1h30 ;
- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Les parties 1 (exercices 1 et 2) et 2 (exercice 3) sont à rendre sur des **copies séparées**. La partie 3 est à répondre directement sur le sujet.

### Partie 1 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

- ▷ **Exercice 1** (Transformée de Fourier et produit de convolution). Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = e^{-|x|}$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .

#### 1.1. Montrer, par un calcul intégral, que

$$f * f(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}$$

**Aide** : pour  $x \geq 0$ , on découpera le domaine d'intégration en  $] -\infty, 0]$ ,  $[0, x]$ ,  $[x, +\infty[$ , et pour  $x \leq 0$ , on découpera le domaine d'intégration en  $] -\infty, x]$ ,  $[x, 0]$ ,  $[0, +\infty[$ .

#### 1.2. Calculer explicitement la transformée de Fourier de $f$ .

#### 1.3. Calculer alors à l'aide des points précédents, **et en justifiant l'utilisation des formules appropriées**, la transformée de Fourier de $(1 + |x|)e^{-|x|}$ .

- ▷ **Exercice 2** (Distributions). Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $T$  une distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . On considère les deux énoncés suivants :

a)  $\langle T, \varphi \rangle = 0$

b)  $\varphi T = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

On veut montrer que ces deux énoncés ne sont pas équivalents, plus précisément que b) implique a), mais que la réciproque est fausse.

#### Pour montrer que a) n'implique pas b) :

Soient  $T = \delta'$  et  $\varphi$  une fonction identiquement égale à 1 au voisinage de 0.

1. Vérifier que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

2. Soit  $\psi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\psi'(0) \neq 0$ . Montrer alors que  $\langle \varphi T, \psi \rangle \neq 0$ .

#### Pour montrer que b) implique a) :

Soient  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telles que  $\varphi T = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\psi$  soit identiquement égale à 1 sur le support de  $\varphi$ . En calculant  $\langle \varphi T, \psi \rangle$ , montrer que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

**Partie 2** (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

▷ **Exercice 3.** On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|^{\frac{1}{n}} \cos(x) e^{-x}. \end{aligned}$$

**3.1.** On pose  $A := \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } f_n(x) = 0 \right\}$ .

- a) Déterminer  $A$ .
- b) Justifier  $\lambda(A) = 0$  ( $\lambda$  étant la mesure de Lebesgue).

**3.2.**

- a) Montrer que la suite  $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$  est dominée par une fonction intégrable (au sens de Lebesgue).
- b) Montrer que la suite  $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$  converge simplement presque partout vers une fonction  $f$  (vous donnerez la fonction  $f$  et l'ensemble sur lequel la convergence a lieu).

**3.3.**

- a) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  (indiquer pourquoi les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont mesurables).
- b) Calculer  $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  en utilisant le lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue (vous justifierez le passage d'une intégrale à l'autre).

Nom :

Prénom :

**Partie 3** (Cette partie est à **répondre sur le sujet**).

- ▷ **Exercice 4** (Vrai ou faux). Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse par une **preuve ou un contre-exemple**.

**4.1.** La famille  $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \mid (\text{card}(A) < +\infty) \text{ ou } (\text{card}(\mathbb{N} \setminus A) < +\infty)\}$  est une tribu.

**4.2.** On note pour  $A \subset \mathbb{R}$ , son symétrique  $-A = \{-x \mid x \in A\}$ . La famille  $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A = -A\}$  est une tribu.

**4.3.** Soit

$$\begin{aligned} f: ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}\}}(x). \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est mesurable et étagée.

**4.4.** On note  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1\} \subset E$  et on introduit la tribu  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, E\}$ . Soit

$$\begin{aligned} f: (E, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\})) \\ x &\longmapsto f(x) = \mathbb{1}_A(x). \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est mesurable.

**4.5.** Soit l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  avec  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. Tout compact de  $\mathbb{R}$  est mesurable, de mesure finie.

**4.6.** Soit

$$\begin{aligned} \mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\mu$  est une mesure sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

**4.7.** Soit l'espace mesuré  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$  avec  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. Soit

$$\begin{aligned} f: ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}\}}(x). \end{aligned}$$

On a  $\int_{[0,1]} f \, d\lambda = +\infty$ .

**4.8.** Soit l'espace mesuré  $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$  avec  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \cos(nx) \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \, d\lambda = 0.$$