

Sujet d'Examen

Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours

## 1 Exercice : changement de variable, passage à la limite (6pts)

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , mesurable sur les tribus boréliennes induites vues en TD. On note la mesure de Lebesgue  $d\mu$ , et  $a_n = n \cdot \int_{[0,1]} \frac{f(nx)}{\sqrt{1+x}} d\mu(x)$ . La notation  $d\mu(x)$  a simplement pour objet d'indiquer la variable (ici  $x$ ) d'intégration.

1. Montrer que l'intégrale est bien définie. Vérifier soigneusement les hypothèses du théorème de changement de variable  $t = nx$  dans l'intégrale définissant  $a_n$ .
2. Citer un théorème permettant de montrer la convergence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . L'appliquer.

## 2 Exercice : Théorie de la mesure (8pts)

Les mesures de cet énoncé sont à considérer sur un espace mesurable fixé  $(E, \mathcal{E})$ .

1. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux mesures, et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux scalaires strictement positifs.
  - (a) Montrer (en 5 lignes max) que la fonction  $\mu$  définie par  $\mu(E) = \alpha_1 \mu_1(E) + \alpha_2 \mu_2(E)$  est une mesure.
  - (b) Définir les ensembles négligeables pour la mesure  $\mu$ .
  - (c) Soit  $A \in \mathcal{E}$ . Soit  $\mathbb{1}_A$  la fonction indicatrice de  $A$ . Que vaut  $\int \mathbb{1}_A d\mu$  ?
  - (d) Conjecturer la valeur de  $\int f d\mu$  dans le cas où  $f$  est intégrable par rapport aux deux mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Expliquer la démarche que vous employeriez pour démontrer votre conjecture (ne pas mener cette démarche, juste donner les principales étapes).
2. Soit  $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de mesures. La fonction  $\mu$  définie par  $\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i(E)$  est-elle une mesure ?
3. Soit  $\delta(a)$  la mesure de Dirac en  $a$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On pose  $\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \delta(\frac{1}{i})$ .
  - (a) Calculer  $\mu([-\infty, -1])$ ,  $\mu([-\infty, 1])$ .
  - (b) Calculer aussi, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mu([-\infty, \epsilon])$ . Calculer  $\mu(\cap_{j=1}^{+\infty} [-\infty, 1/j])$ ,  $\mu([-\infty, 1/j])$  et donner  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu([-\infty, 1/j])$ . A quel résultat du cours peut-on rapprocher ce résultat ? Expliquer l'origine de la différence observée par rapport au cours.

### 3 Exercice : vrai ou faux (8)

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. **On répondra directement sur la feuille de l'énoncé en justifiant chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple.**

1. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[} \sin(nx) \mathbb{1}_{[0, n]}(x) d\mu(x) = 0$ , où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.
  
2. On se place dans  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ . L'ensemble  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que uniquement l'un des deux de } x_1 \text{ et } x_2 \text{ est dans } \mathbb{Q}\}$  est mesurable et sa mesure de Lebesgue est nulle.
  
3. Soit  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  continue, et  $N$  une partie négligeable de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  pour la mesure de Lebesgue. Alors  $f^{-1}(N)$  est négligeable pour la mesure de Lebesgue.
  
4. Soit  $X$  un ensemble infini et  $\mathcal{A} = \{A \subset X, \text{ tels que uniquement l'un des deux de } A \text{ et } X \setminus A \text{ est de cardinal fini}\}$ .  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $X$ .
  
5. Soit  $f(x) = \int_{[0, +\infty[} \frac{1}{1+x^3+t^3} d\mu(t)$ . La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ , décroissante, et tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Ici  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.