



Sujet d'examen – Intégration et applications

Consignes.

- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Les parties 1 (exercices 1 et 2) et 2 (exercices 3 et 4) sont à rendre sur des **copies séparées**.

Partie 1 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

▷ **Exercice 1** (Transformée de Fourier - 8 points).

Remarque. Dans cet exercice, les intégrales considérées sont des intégrales de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $f_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer sa transformée de Fourier \widehat{f}_λ (on demande un calcul explicite, et pas seulement de fournir le résultat donné par une table ou autre).

On cherche maintenant les fonctions g de $L^1(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = e^{-|x|} + \alpha \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|} g(t) dt \quad (1)$$

où α est un réel quelconque.

2. Ecrire cette équation sous la forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
3. En utilisant la transformée de Fourier, exprimer \widehat{g} en fonction de \widehat{f}_1 .
4. En déduire qu'il existe une solution à l'équation (1) si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$. **Aide** : on utilisera le fait qu'une transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est nécessairement continue sur \mathbb{R} .
5. Montrer alors que pour $\alpha < \frac{1}{2}$, cette solution est unique, et la déterminer.

▷ **Exercice 2** (Distributions : transformée de Fourier d'une distribution homogène - 4 points). Soit φ une fonction quelconque de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$. On note φ_α la fonction définie par : $\varphi_\alpha(x) = \varphi(\alpha x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est homogène de degré d si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi_\alpha \rangle = \alpha^{-(d+1)} \langle T, \varphi \rangle$$

1. Exprimer $\widehat{\varphi_\alpha}$ en fonction de $\widehat{\varphi}$.
2. Montrer alors, en calculant $\langle \widehat{T}, \varphi_\alpha \rangle$, que si T est homogène de degré d , alors \widehat{T} est homogène, d'un degré que l'on précisera.

Partie 2 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

▷ **Exercice 3** (7 points). On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|^{\frac{1}{n}} \cos(x) e^{-x}. \end{aligned}$$

3.1. On pose $A := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } f_n(x) = 0\}$.

- a) Déterminer A .
- b) Justifier $\lambda(A) = 0$ (λ étant la mesure de Lebesgue).

3.2.

- a) Montrer que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ est dominée par une fonction intégrable (au sens de Lebesgue).
- b) Montrer que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement presque partout vers une fonction f (vous donnerez la fonction f et l'ensemble sur lequel la convergence a lieu).

3.3.

- a) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$ (indiquer pourquoi les fonctions f_n et la fonction f sont mesurables).
- b) Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$ en utilisant le lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue (vous justifierez le passage d'une intégrale à l'autre).

▷ **Exercice 4** (9 points). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Justifier les réponses.

4.1. La famille $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \mid (\text{card}(A) < +\infty) \text{ ou } (\text{card}(\mathbb{N} \setminus A) < +\infty)\}$ est-elle une tribu ?

4.2. On note $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1\} \subset E$ et on introduit la tribu $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, E\}$. Soit

$$\begin{aligned} f: (E, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\})) \\ x &\longmapsto f(x) = \mathbb{1}_A(x). \end{aligned}$$

La fonction f est-elle mesurable ?

4.3. Soit δ_a la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit f mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et positive. Calculer (en justifiant) $\int_{\mathbb{R}} f d\delta_a$.

4.4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable pour la mesure de Lebesgue et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue. On définit $\varphi(u, x) := g(u - x)f(x)$, la convolée de f et g est alors donnée par

$$u \mapsto (f \star g)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u, x) d\lambda(x).$$

Monter à l'aide du théorème de continuité globale, que $f \star g$ est continue sur \mathbb{R} .