

# Intégration

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

Olivier COTS

6 octobre 2023

Le but de ce chapitre 3 est de définir l'intégrale (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable  $f$  par rapport à une mesure  $\mu$  sur un espace mesurable  $(E, \mathcal{A})$  :

$$\int_E f \, d\mu$$

On se restreint dans ce chapitre aux fonctions **étagées positives** et aux fonctions **mesurables positives**.

On verra le cas des fonctions de signe quelconque au chapitre suivant.

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Intéversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Interversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

**Notation.**

- On note  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  l'ensemble des applications mesurables de  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  dans  $(E_2, \mathcal{A}_2)$ .

**Définition 3.1.1 – Fonction étagée**

Une fonction  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est dite **étagée** si elle ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs.

Alors, il existe une partition finie  $(A_i)_{i \in I}$  de  $E$ ,  $\mathcal{A}$ -mesurable (au sens où  $A_i \in \mathcal{A}$  pour tout  $i \in I$ ), et des nombres réels  $(\alpha_i)_{i \in I}$  t.q. :

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

**Notation.**

- On notera  $\mathcal{E}(\mathcal{A})$  (ou  $\mathcal{E}$ ) l'ensemble des fonctions étagées de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ;
- On notera  $\mathcal{E}_+(\mathcal{A})$  (ou  $\mathcal{E}_+$ ) l'ensemble des fonctions positives de  $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ .**

**Remarque 3.1.1.** Il existe une représentation canonique de  $f \in \mathcal{E}$  sous la forme

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où les  $\alpha_i$  sont **2 à 2 distincts** et où  $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) =: \{f = \alpha_i\}$ .

**Remarque 3.1.2.** Notons que pour  $x \in E$ , on écrit

$$f(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x).$$

**Exemple 3.1.1.** Une fonction indicatrice est étagée car  $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$ .

**Proposition 3.1.2**

$\forall f, g$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f + g \in \mathcal{E}$ , autrement dit  $\mathcal{E}$  est un **espace vectoriel**.

De même  $fg$ ,  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  sont dans  $\mathcal{E}$ .

► Sous forme canonique, on écrit

$$f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{B_j}.$$

Alors

$$\bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) = \left( \bigcup_i A_i \right) \cap \left( \bigcup_j B_j \right) = E \cap E = E,$$

donc  $(A_i \cap B_j)_{i,j}$  est une partition finie de  $E$  et

$$\lambda f + g = \sum_{i,j} (\lambda \alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \quad fg = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \dots$$



### Définition 3.1.3 – Intégrale des fonctions étagées positives

On appelle **intégrale** (au sens de Lebesgue) d'une fonction étagée positive  $f \in \mathcal{E}_+$  par rapport à la mesure  $\mu$  sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{A})$ , l'élément :

$$\int_E f \, d\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty],$$

avec la convention  $0 \times \infty = 0$ .

Si  $\int_E f \, d\mu < +\infty$ , on dit que  $f$  est **intégrable**.

**Remarque 3.1.3.** L'intégrale ne dépend pas de la représentation. Si  $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  alors

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \left( \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i).$$

**Exemple 3.1.2.** Pour  $A \in \mathcal{A}$  on a  $\int_E \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$  et pour  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_E a \, d\mu = a\mu(E)$ .



**Comparaison avec l'intégrale de Riemann.** On se place sur l'espace mesuré

$$([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$$

pour  $a < b \in \mathbb{R}$  donnés.

Source Wikipedia :

*En concevant son intégrale, Lebesgue l'a lui-même comparée à l'intégrale de Riemann : « Imaginez que je doive payer une certaine somme ; je peux sortir les pièces de mon porte-monnaie comme elles viennent pour arriver à la somme indiquée, ou sortir toutes les pièces et les choisir selon leur valeur. La première méthode est l'intégrale de Riemann, la deuxième correspond à mon intégrale. » Pour comprendre cette phrase, il faut préciser que l'intégration de Riemann « parcourt » le segment et exploite au fur et à mesure la « hauteur »  $y$  de la fonction, alors que l'intégration de Lebesgue exploite la « taille » des ensembles de niveau  $f = y$  pour toutes les valeurs de  $y$ .*

**Comparaison avec l'intégrale de Riemann.** On se place sur l'espace mesuré

$$([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$$

pour  $a < b \in \mathbb{R}$  donnés.

Soit  $\{x_0 := a < x_1 < x_2 < x_3 := b\}$  une subdivision de  $[a, b]$  et soit une fonction  $f$  en escalier sur cette subdivision t.q.  $f$  vaut 10 sur  $[x_0, x_1[ \cup [x_2, x_3]$  et vaut 30 sur  $[x_1, x_2[$ .

**L'intégrale de Riemann** est calculée ainsi

$$\int_a^b f(x) dx = 10 \cdot (x_1 - x_0) + 30 \cdot (x_2 - x_1) + 10 \cdot (x_3 - x_2)$$

tandis que **l'intégrale de Lebesgue** est plutôt calculée comme cela

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = 10 \cdot ((x_1 - x_0) + (x_3 - x_2)) + 30 \cdot (x_2 - x_1).$$

**Remarque 3.1.4.** Bien sûr ces deux intégrales sont égales. L'intégrale de Lebesgue généralise celle de Riemann comme on le verra plus tard. Notons qu'une fonction en escalier est une fonction étagée (la preuve est laissée en exercice). Le contraire est faux :  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ .

**Exercice 3.1.3.** Soit  $f \in \mathcal{C}_+$ . Soit  $\delta_0$  la mesure de Dirac en 0 définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  par :

$$\begin{aligned} \delta_0: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \delta_0(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminer  $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$ .

Exercice : faire l'exercice.

**Exercice 3.1.3.** Soit  $f \in \mathcal{C}_+$ . Soit  $\delta_0$  la mesure de Dirac en 0 définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  par :

$$\begin{aligned} \delta_0: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \delta_0(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminer  $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$ .

► Soit  $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  une représentation de  $f$  ( $I$  de cardinal fini).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\delta_0 \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_0(A_i) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(0) = f(0). \end{aligned}$$



## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Intéversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

**Notation.** On pourra utiliser les notations

$$\int_{(E, \mathcal{A})} f \, d\mu, \quad \int_E f \, d\mu, \quad \int_E f(x) \, d\mu(x), \quad \int_E f(x) \mu(dx) \quad \text{ou} \quad \int f \, d\mu.$$

### Proposition 3.1.4

L'application  $f \mapsto \int_E f \, d\mu$  du cône<sup>1</sup>  $\mathcal{E}_+$  vérifie :

- i)  $\forall f, g \in \mathcal{E}_+ \quad : \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu; \quad \text{(additivité)}$
- ii)  $\forall f \in \mathcal{E}_+, \forall a \geq 0 \quad : \int (af) \, d\mu = a \int f \, d\mu; \quad \text{(homogénéité positive)}$
- iii)  $\forall f, g \in \mathcal{E}_+ \quad : f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \quad \text{(croissance)}$

1.  $K$  est un cône si  $\mathbb{R}_+^* K \subset K$ , pointé si  $0 \in K$  et épointé si  $0 \notin K$ .

i)  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ ; (additivité)

► Sous forme canonique, si  $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  et  $g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$  alors  $E = \cup_i A_i = \cup_j B_j$  et donc  $(A_i \cap B_j)_{i,j}$  est une partition finie de  $E$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap (\cup_j B_j)) + \sum_j \beta_j \mu((\cup_i A_i) \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$



ii)  $\forall a \geq 0 : \int (af) d\mu = a \int f d\mu ;$  (homogénéité positive)

► Sous forme canonique, si  $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  alors :

$$\begin{aligned} \int_E (af) d\mu &= \int_E \left( a \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\mu = \int_E \left( \sum_i a \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\mu \\ &= \sum_i a \alpha_i \mu(A_i) = a \sum_i \alpha_i \mu(A_i) \\ &= a \int_E f d\mu. \end{aligned}$$





iii)  $\forall f, g \in \mathcal{E}_+ : f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$  (croissance)

► En écrivant  $g = f + (g - f)$  avec  $g - f \in \mathcal{E}_+$ , on a par **additivité i)** :

$$\int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E (g - f) \, d\mu \Rightarrow \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$



## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Interversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

### Notation.

- On notera  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  (ou  $\mathcal{M}$ ) l'ensemble  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ ;
- On notera  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$  (ou  $\mathcal{M}_+$ ) l'ensemble de fonctions positives de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ;

### Théorème 3.2.1 – Lemme fondamental d'approximation

Toute fonction de  $\mathcal{M}_+$  est limite simple d'une suite croissante de fonctions de  $\mathcal{E}_+$ .

► Soit  $f \in \mathcal{M}_+$ . On définit

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

Alors  $\forall n$ ,  $f_n$  est une fonction étagée positive, i.e.  $f_n \in \mathcal{E}_+$ .

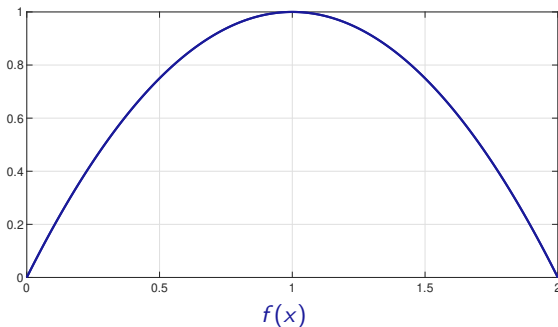
De plus,  $\forall x \in E$  la suite  $(f_n(x))$  est bien croissante et converge vers  $f(x)$ . En effet, si  $f(x) = +\infty$ , alors  $f_n(x) = n \rightarrow +\infty$ ; sinon  $\exists n_0$  t.q.  $f(x) < n_0$ , ce qui implique que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n} \rightarrow 0$ . ■

**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

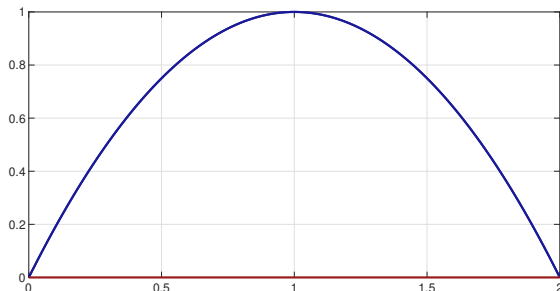


**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



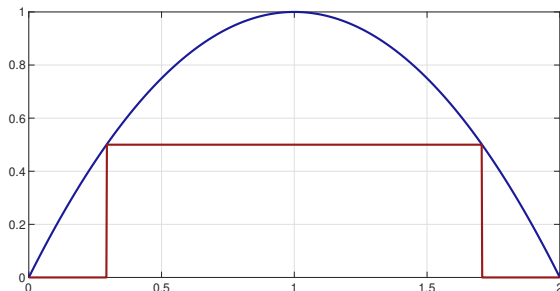
$f(x)$ ,  $f_n(x)$  avec  $n = 0$

**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



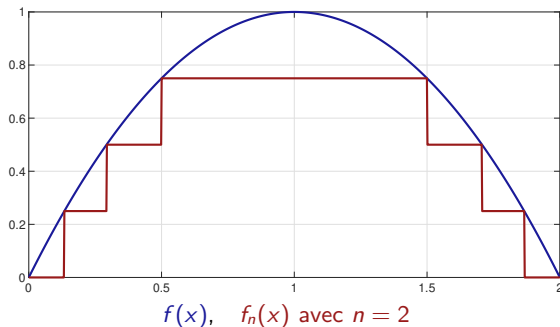
$f(x)$ ,  $f_n(x)$  avec  $n = 1$

**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

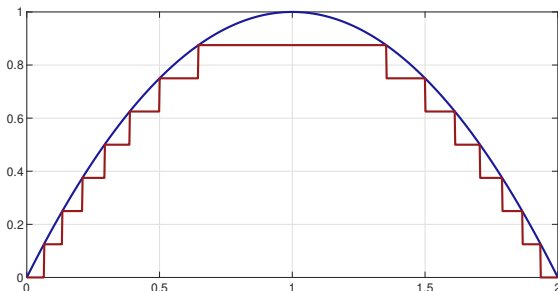


**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



$f(x)$ ,  $f_n(x)$  avec  $n = 3$

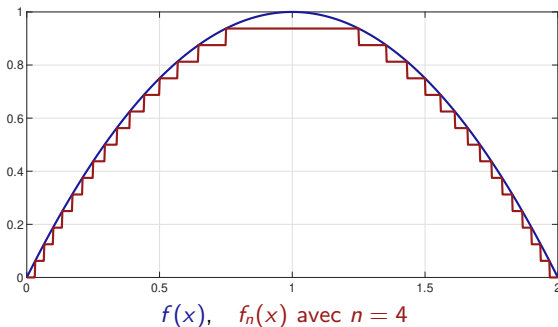


**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

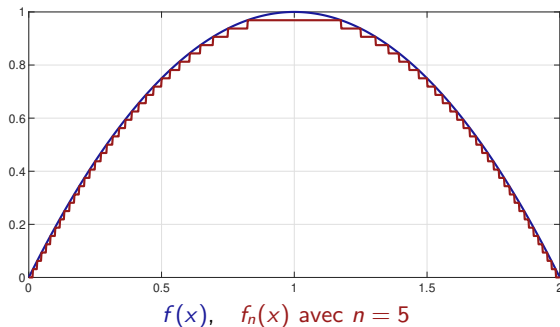


**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

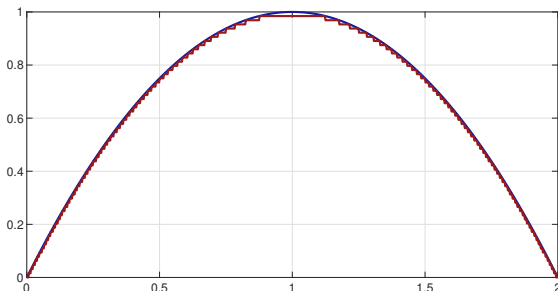


**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



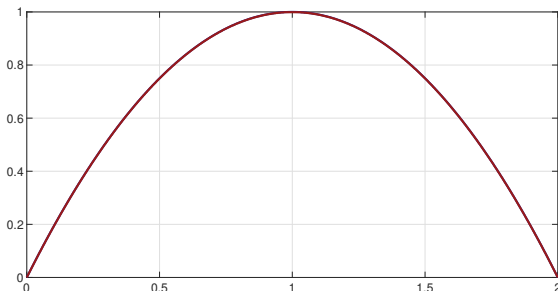
$f(x)$ ,  $f_n(x)$  avec  $n = 6$

**Illustration.** On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



$f(x)$ ,  $f_n(x)$  avec  $n = 10$

- Pour  $n = 10$ ,  $2^{-n}/10^{-3} \approx 0.98$ , ce qui explique pourquoi on ne distingue plus à l'oeil les deux courbes.

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Interversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

### Définition 3.2.2 – Intégrale des fonctions mesurables positives

On appelle **intégrale** (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable positive  $f \in \mathcal{M}_+$  par rapport à la mesure  $\mu$  sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{A})$ , l'élément :

$$\int_{(E, \mathcal{A})} f \, d\mu \quad \text{ou} \quad \int_E f \, d\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \in \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty].$$

Si  $\int_E f \, d\mu < +\infty$ , on dit que  $f$  est **intégrable**.

### Proposition 3.2.3 – Intégration sur un ensemble de mesure nulle

Si  $\mu(E) = 0$  alors  $\int_E f \, d\mu = 0$ .

► Soit  $\varphi \in \mathcal{E}_+$  sous forme canonique  $\varphi = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ . Alors, par **croissance de la mesure**,  $\forall i : \mu(A_i) = 0$  puisque  $A_i \subset E$  et  $\mu(E) = 0$ . Ainsi,  $\int_E \varphi \, d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) = 0$ . On peut alors conclure. ■

### Proposition 3.2.4 – Restriction de l'intégrale à un ensemble mesurable

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f \in \mathcal{M}_+$  intégrable sur  $(E, \mathcal{A})$  par rapport à  $\mu$ .

Soit  $A \in \mathcal{A}$  un ensemble mesurable. Alors<sup>3</sup>

$$\int_{(E, \mathcal{A})} f \mathbb{1}_A d\mu = \int_{(A, \text{tr}(\mathcal{A}))} f|_A d\mu.$$

**Notation.** On utilisera souvent la notation  $\int_A f d\mu$  à la place de  $\int_E f \mathbb{1}_A d\mu$ , ce qui est justifié par la proposition précédente.

### Corollaire 3.2.5

Si  $\mu(A) = 0$  alors  $\int_E f \mathbb{1}_A d\mu = \int_A f d\mu = 0$ .

3. Voir Chapitre 2, Section 2.1 pour la définition de la tribu trace  $\text{tr}(\mathcal{A})$ .

► Soit  $\varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$  sous forme canonique  $\varphi = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ . Alors  $\varphi \mathbb{1}_A = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap A}$  nous donne une représentation de la restriction de  $\varphi$  à  $A$ , notée  $\varphi|_A$ . La fonction étagée  $\varphi|_A$  est mesurable sur  $(A, \text{tr}(\mathcal{A}))$ , i.e.  $\varphi|_A \in \mathcal{E}_+(\text{tr}(\mathcal{A}))$ . Ainsi,

$$\int_{(E, \mathcal{A})} \varphi \mathbb{1}_A \, d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap A) = \int_{(A, \text{tr}(\mathcal{A}))} \varphi|_A \, d\mu.$$

Il vient ensuite par la définition de l'intégrale dans  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$  :

$$\begin{aligned} \int_{(E, \mathcal{A})} f \mathbb{1}_A \, d\mu &= \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ et } \varphi \leq f \mathbb{1}_A \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E \varphi \mathbb{1}_A \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ et } \varphi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_A \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\text{tr}(\mathcal{A})) \text{ et } \varphi \leq f|_A \right\} \\ &= \int_{(A, \text{tr}(\mathcal{A}))} f|_A \, d\mu. \end{aligned}$$





### Proposition 3.2.6 – Croissance de l'intégrale

Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{M}_+$  telles que  $f \leq g$ , alors  $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$ .

► Si  $\varphi \in \mathcal{E}_+$  est telle que  $\varphi \leq f$  alors  $\varphi \leq g$ . Ainsi

$$\{\varphi \in \mathcal{E}_+ \mid \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathcal{E}_+ \mid \varphi \leq g\}$$

et donc

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq g \right\}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. ■

### Corollaire 3.2.7 – Théoreme de comparaison

Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{M}_+$ . Si  $f \leq g$  et si  $g$  est intégrable, alors  $f$  est intégrable.

### Corollaire 3.2.8

Si  $\mu$  est **finie** alors pour toute  $f \in \mathcal{M}_+$ , si  $f$  est bornée alors elle est intégrable.

►  $\exists a \geq 0$  t.q.  $f \leq a1_E$  et  $\int_E a1_E d\mu = a\mu(E) < +\infty$ . ■

### Corollaire 3.2.9

Pour toute  $f \in \mathcal{M}_+$  :  $\int_E f d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0$ .

► Soit  $A := \{f = +\infty\}$ . Par contraposée, si  $\mu(A) > 0$  alors  $\int_E f d\mu \geq \int_E f1_A d\mu = +\infty \times \mu(A) = +\infty$ . ■

**Corollaire 3.2.10 – Inégalité de Markov**

Pour toute  $f \in \mathcal{M}_+$  et pour tout  $a > 0$ ,

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, d\mu.$$

► Voir TD.



## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Intéversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

### Théorème 3.2.11 – de Beppo-Levi, ou de convergence monotone

Si  $(f_n)$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , alors  $f := \lim_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$  et

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu.$$

### Corollaire 3.2.12

L'intégrale  $\int_E f \, d\mu$  est la limite des intégrales  $\int_E f_n \, d\mu$ , où  $(f_n)$  est une suite **arbitraire** de fonctions étagées positives croissant vers  $f$ .

**Remarque 3.2.1.** On aurait pu définir  $\int_E f \, d\mu$  comme la limite (et non la borne sup.) des intégrales de toute suite de fonctions étagées positives croissant vers  $f$ , mais alors il aurait fallu montrer que cette limite ne dépend pas de la suite de fonctions choisie.

► (*Preuve du théorème de Beppo-Levi*).

$$1. \text{ Montrons que } \lim_n \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu.$$

Puisque la suite  $(f_n)$  est croissante, sa limite est bien définie (les fonctions sont à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) et mesurable par **stabilité de la propriété de mesurabilité par passage à la limite** (cf. Chapitre 2) :

$$f := \lim_n f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}).$$

Puisque  $\forall n : f_n \leq f$ , par **croissance de l'intégrale** sur  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ ,

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

et donc par **passage à la limite**

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

2. Montrons que  $\int_E f \, d\mu \leq \lim_n \int_E f_n \, d\mu$ .

Puisque par définition  $\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$ , il suffit de montrer :

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ t.q. } \varphi \leq f : \int \varphi \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu.$$

Supposons que l'on ait montré :

$$\text{H) } \forall \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ t.q. } \varphi \leq f \text{ et } \forall a \in [0, 1[ : a \int \varphi \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu.$$

Alors, puisque  $a$  est arbitrairement proche de 1, on peut conclure en **passant à la limite**.

Montrons : H)  $\forall \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$  t.q.  $\varphi \leq f$  et  $\forall a \in [0, 1[ : a \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$  t.q.  $\varphi \leq f$  et soit  $a \in [0, 1[$ .

On pose  $E_n := \{a\varphi \leq f_n\}$ .

■ Alors  $(E_n)$  est une suite croissante (car  $(f_n)$  croissante) dans  $\mathcal{A}$  (car  $f_n$  et  $\varphi$  mesurables) t.q.

$$\lim E_n = \cup E_n = E.$$

En effet, si  $x \in E$  est t.q.  $f(x) = 0$ , alors  $x \in E_n$  pour tout  $n$  car  $\varphi(x) = f_n(x) = 0$ .  
Sinon, si  $f(x) > 0$ , alors

$$a\varphi(x) < f(x)$$

car  $\varphi$  ne prend que des valeurs finies. Il existe donc  $N_x \in \mathbb{N}$  t.q.  $x \in E_n$  pour tout  $n \geq N_x$ .



Montrons : H)  $\forall \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$  t.q.  $\varphi \leq f$  et  $\forall a \in [0, 1[ : a \int \varphi \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu$ .

On a posé  $E_n = \{a\varphi \leq f_n\}$  et on a  $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  suite croissante t.q.  $\cup E_n = E$ .

■ Sous forme canonique on écrit  $\varphi = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ . Alors

$$\int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = a \int \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n} \right) \, d\mu = a \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Par **continuité à gauche** de la mesure  $\mu$ ,  $\lim_n \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$  pour tout  $i \in I$ , donc en passant à la limite,  $I$  étant fini, on a

$$\lim \int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = a \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i) = a \int \varphi \, d\mu.$$

D'autre part, puisque  $E_n = \{a\varphi \leq f_n\}$ , alors  $a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \leq f_n$  et donc

$$\int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu \quad (\text{on rappelle que } (f_n) \text{ est croissante}),$$

et H) est démontrée en passant à la limite et en utilisant l'égalité précédente. ■

**Exemple 3.2.1** (Mesure de comptage). L'intégration par rapport à la mesure de comptage  $m := \text{card}$  sur  $\mathbb{N}$  est tout simplement la **sommation de série**. En effet,

$$u \in \mathcal{M}_+(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

est tout simplement une suite  $(u_n)$  de réels positifs, i.e.  $u(n) = u_n$ , et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , l'application (qui est une suite)

$$\varphi_N := u \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} = \sum_{n=0}^N u_n \mathbb{1}_{\{n\}}$$

est une **fonction étagée positive qui converge en croissant vers  $u$**  ;

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N(n) = u(n) = u_n \quad \text{et} \quad \varphi_N(n) \leq \varphi_{N+1}(n).$$

Par le théorème de Beppo-Levi, puisque  $(\varphi_N)$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+$  qui converge vers  $u$ , alors

$$\int_{\mathbb{N}} u \, dm = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_N \, dm = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n m(\{n\}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

**Proposition 3.2.13 – Lemme de Fatou**

Pour toute suite  $(f_n)$  de  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , nous avons  $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$  et

$$\int_E \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n \, d\mu.$$

**Remarque 3.2.2.** La suite n'est pas supposée croissante.

**Remarque 3.2.3.** Pour  $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$  où  $A_n \in \mathcal{A}$ , le lemme de Fatou se traduit par l'inégalité

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

**Remarque 3.2.4.** Pour les plus curieux, vous trouverez trois exemples où l'inégalité du lemme de Fatou est stricte [ici](#).

### Proposition 3.2.13 – Lemme de Fatou

Pour toute suite  $(f_n)$  de  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , nous avons  $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$  et

$$\int_E \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n \, d\mu.$$

► Soient  $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$  et  $g := \liminf_n f_n = \lim_n g_n$ . Comme  $g$  est la limite simple de la suite croissante  $(g_n)$  dans  $\mathcal{M}_+$ , d'après le **théorème de Beppo-Levi**, on a

$$\int g \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu.$$

D'autre part,  $g_n \leq f_n$  donc par **croissance de l'intégrale**,  $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$  et donc

$$\liminf_n \int g_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

D'après ce qui précède,  $\liminf_n \int g_n \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$ , ce qui permet de conclure. ■

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Intéversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

**Proposition 3.2.14**

L'application  $f \mapsto \int_E f \, d\mu$  du cône  $\mathcal{M}_+$  vérifie :

$$\text{i) } \forall f, g \in \mathcal{M}_+ \quad : \quad \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu; \quad \text{(additivité)}$$

$$\text{ii) } \forall f \in \mathcal{M}_+, \forall a \geq 0 \quad : \quad \int (af) \, d\mu = a \int f \, d\mu; \quad \text{(homogénéité positive)}$$

$$\text{iii) } \forall f, g \in \mathcal{M}_+ \quad : \quad f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \quad \text{(croissance)}$$

**Remarque 3.2.2.** Comparer à la proposition 3.1.4 slide 14.

**Remarque 3.2.3.** Nous avons déjà démontré la croissance de l'intégrale.

► (*Preuve de l'additivité / homogénéité positive, la croissance étant déjà démontrée*).

Puisque  $f \in \mathcal{M}_+$ , d'après le **lemme d'approximation**, il existe une suite  $(f_n)$  dans  $\mathcal{E}_+$  croissante et convergeant simplement vers  $f$ .

i) Par la propriété de **homogénéité positive** sur  $\mathcal{E}_+$ , on a :  $\int a f_n d\mu = a \int f_n d\mu$ .

ii) Par le **théorème de Beppo-Levi**, on a

$$\lim_n \int a f_n d\mu = \int \lim_n (a f_n) d\mu = \int a f d\mu$$

mais aussi

$$\lim_n a \int f_n d\mu = a \lim_n \int f_n d\mu = a \int \lim_n (f_n) d\mu = a \int f d\mu.$$

Ainsi i) + ii) nous donne

$$\int a f d\mu = a \int f d\mu.$$

■ L'additivité se montre de manière similaire : **approx.** + **Beppo-Levi** + **additivité** sur  $\mathcal{E}_+$ . ■

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Interversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$



**Proposition 3.2.15 – Intersion intégrale et somme**

Pour toute suite  $(f_n)$  de  $\mathcal{M}_+$ , nous avons  $\sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$  et surtout

$$\int_E \left( \sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \int_E f_n d\mu.$$

Exercice : faire la preuve.

### Proposition 3.2.15 – Intersion intégrale et somme

Pour toute suite  $(f_n)$  de  $\mathcal{M}_+$ , nous avons  $\sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$  et surtout

$$\int_E \left( \sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \int_E f_n d\mu.$$

► On pose  $g_n := \sum_{k=0}^n f_k$ . Puisque  $(g_n)$  est une suite croissante dans  $\mathcal{M}_+$ , d'après le **théorème de Beppo-Levi**, on a  $\lim_n g_n \in \mathcal{M}_+$  et  $\int \lim_n g_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu$ . Mais

$$\int \lim_n g_n d\mu = \int \lim_n \left( \sum_{k=0}^n f_k \right) d\mu = \int \left( \sum_n f_n \right) d\mu$$

et

$$\begin{aligned} \lim_n \int g_n d\mu &= \lim_n \int \left( \sum_{k=0}^n f_k \right) d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^n \int f_k d\mu \quad (\text{par additivité}) \\ &= \sum_n \int f_n d\mu. \end{aligned}$$



**Corollaire 3.2.16 – Mesure de densité**

Pour toute  $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , l'application

$$\begin{aligned}\nu: \mathcal{A} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \nu(A) := \int_A f \, d\mu\end{aligned}$$

est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$  appelée mesure de **densité**  $f$  par rapport à  $\mu$ .

► Voir TD.

**Notation.** On pourra utiliser la notation  $\nu = f\mu$ .

**Exercice 3.2.2.** Montrer que la mesure de Dirac (en 0) n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice : faire l'exercice.

### Corollaire 3.2.16 – Mesure de densité

Pour toute  $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , l'application

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{A} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \nu(A) := \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$  appelée mesure de **densité**  $f$  par rapport à  $\mu$ .

► Voir TD.

**Notation.** On pourra utiliser la notation  $\nu = f\mu$ .

**Exercice 3.2.2.** Montrer que la mesure de Dirac (en 0) n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

► Supposons que  $\delta_0 = f\lambda$ . Alors, d'après le corollaire 3.2.5,

$$1 = \delta_0(\{0\}) = \int_{\{0\}} f \, d\lambda = 0 \quad \text{car} \quad \lambda(\{0\}) = 0.$$

## Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Intégrale des fonctions étagées positives

#### 3.1.1. Fonctions étagées et intégrale

#### 3.1.2. Propriétés de l'intégrale

### 3.2. Intégrale des fonctions mesurables positives

#### 3.2.1. Approximation des fonctions mesurables positives

#### 3.2.2. Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

#### 3.2.3. Théorème de convergence monotone

#### 3.2.4. Linéarité positive

#### 3.2.5. Intéversion intégrale et somme

#### 3.2.6. Égalité des intégrales

$$\int_E f \, d\mu$$

### Proposition 3.2.17

Pour toute  $f \in \mathcal{M}_+$  :  $\int_E f \, d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0$ .

► Montrons le sens  $\Rightarrow$ . On pose  $A_n := \{f \geq 1/n\}$ . Par **l'inégalité de Markov**,<sup>4</sup> par **positivité** de la mesure et par **hypothèse**,

$$0 \leq \mu(A_n) \leq n \int_E f \, d\mu = 0.$$

Or  $A := \{f \neq 0\} = \lim A_n$ , donc par **continuité à gauche** de  $\mu$ ,  $\mu(A) = \lim \mu(A_n) = 0$ .

■ Montrons le sens  $\Leftarrow$ . Par **additivité**, puisque  $f = f\mathbb{1}_A + f\mathbb{1}_{A^c}$ , on a

$$\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{A^c} f \, d\mu$$

mais  $\int_{A^c} f \, d\mu = 0$  car  $f\mathbb{1}_{A^c} = 0$  sur  $E$ , et donc puisque  $\mu(A) = 0$  alors  $\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu = 0$ , cf. Corollaire 3.2.5. ■

4.  $\forall f \in \mathcal{M}_+$  et  $a > 0$  :  $a\mu(\{f \geq a\}) \leq \int f \, d\mu$ .

### Proposition 3.2.18

Pour toutes  $f, g \in \mathcal{M}_+ : \mu(\{f \neq g\}) = 0 \implies \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ .

► On pose

$$h := \begin{cases} \max(f, g) - \min(f, g) & \text{sur } \{\min(f, g) < +\infty\} \\ 0 & \text{sur } \{f = g = +\infty\}. \end{cases}$$

Comme  $\{f = g\} = \{h = 0\}$ , par complémentaire  $\{h \neq 0\} = \{f \neq g\}$ , donc par **hypothèse**  $\mu(\{h \neq 0\}) = 0$  et par la **proposition précédente**  $\int_E h \, d\mu = 0$ . Puisque  $\max(f, g) = \min(f, g) + h$ , par **additivité** on a

$$\int_E \max(f, g) \, d\mu = \int_E \min(f, g) \, d\mu + \int_E h \, d\mu = \int_E \min(f, g) \, d\mu.$$

Mais  $\min(f, g) \leq f, g \leq \max(f, g)$ , donc par **croissance de l'intégrale** sur  $\mathcal{M}_+$  :

$$\int_E \max(f, g) \, d\mu = \int_E \min(f, g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu. \quad \blacksquare$$