



TD 1 — Fonctions mesurables, mesures, tribus

▷ **Exercice 1.** Soient f_1 et f_2 deux applications mesurables de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que :

- a) $\{x \in E \mid f_1(x) = f_2(x)\} \in \mathcal{A}$,
- b) $\{x \in E \mid f_1(x) \leq f_2(x)\} \in \mathcal{A}$ et $\{x \in E \mid f_1(x) \geq f_2(x)\} \in \mathcal{A}$,
- c) $\{x \in E \mid f_1(x) < f_2(x)\} \in \mathcal{A}$ et $\{x \in E \mid f_1(x) > f_2(x)\} \in \mathcal{A}$.

▷ **Exercice 2.** Soient (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables. Soient $\mu: \mathcal{A}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur (E_1, \mathcal{A}_1) et f une application mesurable de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2) . On pose

$$\begin{aligned} \mu_f: \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Montrer que μ_f est une mesure sur (E_2, \mathcal{A}_2) , appelée *mesure image* de μ par f .

▷ **Exercice 3.** Soit p une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto F(t) := p([-\infty, t]). \end{aligned}$$

3.1. Montrer que F est croissante et continue à droite.

3.2. Calculer (si existence) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t)$.

▷ **Exercice 4.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec λ la mesure de Lebesgue. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

4.1. λ est σ -finie.

4.2. $\forall K \subset \mathbb{R}$ compact, $\lambda(K) < +\infty$.

4.3. Soit O un ouvert de \mathbb{R} . $\lambda(O) < +\infty \Rightarrow O$ borné.

Exercices supplémentaires.

▷ **Exercice 5** (Formules de Hausdorff). Soient E et F deux ensembles. Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer les propositions suivantes :

- 1. $\forall B \subset F, [f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c)$.
- 2. Soit I un ensemble d'indices non vide et soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F . Alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) &= \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \\ f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) &= \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

▷ **Exercice 6** (Tribu image). Soient E_1 et E_2 deux ensembles. Soit $f: E_1 \rightarrow E_2$ une application. Soit \mathcal{A}_1 une tribu sur E_1 . On pose $\mathcal{A}_2 := \{B \subset E_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$. Montrer que \mathcal{A}_2 est une tribu sur E_2 . Elle est appelée la *tribu image* de \mathcal{A}_1 par f .

▷ **Exercice 7.** Montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les classes de parties suivantes :

$$1) \mathcal{C}_1 := \{[x, +\infty[\mid x \in \mathbb{R}\} \quad 2) \mathcal{C}_2 := \{[a, +\infty[\mid a \in \mathbb{Q}\}.$$