



TD 2 – Intégrales de fonctions mesurables positives

- ▷ **Exercice 1** (Inégalité de Markov). Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit f mesurable de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et positive. Montrer que

$$\forall a > 0, \quad \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 2.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive.

2.1. On définit

$$\begin{aligned} \mu_f: \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\longmapsto \mu_f(A) := \int_E f \mathbf{1}_A \, d\mu. \end{aligned}$$

Montrer que μ_f est une mesure sur (E, \mathcal{A}) , appelée *mesure de densité f par μ* .

2.2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints et de réunion $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. En déduire que

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

- ▷ **Exercice 3.** Soit f mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et positive. Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} \delta_0: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\longmapsto \delta_0(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$.

- ▷ **Exercice 4** (Relation de Chasles généralisée pour les fonctions mesurables positives). Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} deux à deux d'intersection de mesure nulle et de réunion $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit f mesurable positive de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Exercice supplémentaire (à faire si le temps le permet pendant la séance).

- ▷ **Exercice 5.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

5.1. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable positive telle que :

$$\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0.$$

f est-elle intégrable sur E ?

5.2. Réciproquement, est-ce qu'une fonction intégrable f est finie presque partout, *i.e.* vérifie $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$?