



## TD 3 – Intégrales et théorèmes limites

▷ **Exercice 1.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit  $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ .

1.1. Montrer que :

$$\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

1.2. Montrer que si  $\exists N \in \mathbb{N}$ , t.q.  $\int_E f_N \, d\mu < +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

**Remarque.** On rappelle que  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue.

▷ **Exercice 2.** Pour chacune des suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions boréliennes de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\lambda.$$

2.1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$

2.2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}.$

2.3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos x \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$

**Exercice supplémentaire (à faire si le temps le permet pendant la séance).**

▷ **Exercice 3.** On considère l'espace mesuré  $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$ . On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n: \quad \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f_n(x) := \frac{n e^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 x^2}} \end{aligned}$$

mesurable de  $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$  dans  $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ . Utiliser le lemme de Fatou pour montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \, d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

*Indication :* on admettra que  $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-x}}{x} \, d\lambda = +\infty$ .