



TD 4 – Fubini, intégrale à paramètre, changement de variables et espaces L^p

- ▷ **Exercice 1.** Soit $(u_{k,l})_{(k,l) \in \mathbb{N}^2}$ une double suite de réels positifs. Montrer, à l'aide du théorème de Fubini, que

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,l} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} u_{k,l}.$$

Remarque. On rappelle que λ est la mesure de Lebesgue.

- ▷ **Exercice 2.** On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\lambda(x) d\lambda(y)$$

2.1. Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à I .

2.2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+x^2y} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2}.$$

2.3. En déduire que $I = \frac{\pi^2}{2}$.

2.4. Retrouver ce résultat en utilisant le changement de variables : $v = x\sqrt{y}$, $t = \sqrt{y}$.

- ▷ **Exercice 3.** Soit F la fonction définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} d\lambda(x).$$

3.1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.

3.2. Calculer $F(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

- ▷ **Exercice 4.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On dit que $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, si

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty.$$

On pose alors

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de L^2 qui convergent vers f et g dans L^2 . Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^1 .

Exercices supplémentaires.

▷ **Exercice 5.** On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)} \, d\lambda(x).$$

5.1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.

5.2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* .

5.3. Montrer que F admet une dérivée à droite en 0. Dans le calcul de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$, on pourra faire le changement de variable $x = u^2 t^2$ puis utiliser le théorème de convergence dominée.

5.4. F est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?