



Sujet d'examen – Intégration et applications

Consignes.

- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Les parties 1 (exercices 1 et 2) et 2 (exercices 3 et 4) sont à rendre sur des **copies séparées**.

Partie 1 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée** - 9 points).

▷ **Exercice 1** (Transformée de Fourier et produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$). Les 2 questions sont indépendantes.

1. A l'aide la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe pas de fonction g de $L^1(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ on ait

$$f * g = f$$

Aide : on utilisera le comportement à l'infini de la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

2. A l'aide la transformée de Fourier, et en justifiant les calculs, trouver les fonctions f de $L^1(\mathbb{R})$ qui vérifient l'équation

$$f * f = f$$

Aide : on rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

▷ **Exercice 2** (Linéarité de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée). Les 2 questions sont indépendantes.

1. Sur l'espace $S'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées, on rappelle que la transformée de Fourier d'une distribution est définie par :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}), \quad \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

Montrer que l'application $T \mapsto \widehat{T}$ est bien une application linéaire.

2. Soit (T_n) une suite de distributions tempérées telle que $\sum_n T_n$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers la distribution tempérée T (c'est-à-dire, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}), \langle T, \varphi \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \sum_{n=1}^N T_n, \varphi \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \sum_{n=1}^N T_n, \varphi \rangle$). Montrer que

$$\widehat{T} = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{T}_n.$$

Partie 2 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

▷ **Exercice 3** (Intégrale de Dirichlet - 7 points). On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

3.1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-xt} \mathbf{1}_{[0,n]}(t)$ sur \mathbb{R} .

a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda,$$

où f est une fonction à préciser.

b) En justifiant le passage de l'intégrale de Lebesgue à Riemann, calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$.

c) En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} \, d\lambda(t)$.

Remarque 1. On pourra à partir de maintenant, ne plus justifier le passage de l'intégrale de Lebesgue à celle de Riemann.

3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$g_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[0,n]} e^{-xt} \sin x \, d\lambda(x) = \frac{1 - te^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n}{1 + t^2} \quad (t \geq 0).$$

3.3.

a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est mesurable de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

b) Montrer que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n \, d\lambda$.

3.4. On admet que

$$\int_{[0,n]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} \, d\lambda(t) \right) \sin x \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,n]} e^{-xt} \sin x \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(t).$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,n]} \frac{\sin x}{x} \, d\lambda = \frac{\pi}{2}$.

▷ **Exercice 4** (6 points). Les questions sont indépendantes les unes des autres.

On pose $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ et on définit

$$\begin{aligned} \mu: \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

4.1. Montrer que la famille \mathcal{A} est une tribu sur \mathbb{R} .

4.2. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

4.3. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \notin \mathcal{A}$. Soit

$$\begin{aligned} f_A: (\mathbb{R}, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\})) \\ x &\longmapsto f_A(x) = \mathbf{1}_A(x). \end{aligned}$$

La fonction f_A est-elle mesurable ?

4.4. On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Soient A, B dans \mathcal{A} et α, β dans \mathbb{R} . On suppose A dénombrable et B non dénombrable. On pose $f = \alpha \mathbf{1}_A + \beta \mathbf{1}_B$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$.