

Examen avec documents : 1 feuille A4

Sujet d'Examen

Janvier 2016

Privilégier les réponses courtes et rigoureuses

**Rendre les deux premiers exercices sur des feuilles séparées
de celles des deux derniers**

1 Exercice 1 : passage à la limite sous l'intégrale (3pt).

On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_{[1, +\infty[} f_n d\mu$ où

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)}{x^2}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé non nul.
 - (a) Expliquer brièvement, en utilisant un argument de continuité, pourquoi $x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)}{x^2}$ est mesurable sur $[1, +\infty[$.
 - (b) Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est Lebesgue intégrable sur $[1, +\infty[$. On pourra introduire la suite de fonctions $(f \cdot 1_{[1, p]})_{p \in \mathbb{N}}$. Calculer $\int_{[1, +\infty[} f d\mu$.
2. Calculer la limite de la suite (u_n) , en explicitant les résultats qui vous permettent de réaliser ce calcul.

2 Exercice 2 : Fubini et changement de variable (5pt).

Soit $D = \{(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}$.

1. On admet que la fonction $f : (x, y) \mapsto \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ est mesurable sur D . Est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur D ? On note $I = \int_D f d\mu$.
2. On envisage le changement de variable défini par $u = \phi_1(x, y) = x - y$ et $v = \phi_2(x, y) = x + y$. Soit D' l'image de D par l'application $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ correspondant à ce changement de variable. Montrer que $D' = \{(u, v), 0 < v < 1, -v < u < v\}$. Montrer que les hypothèses du théorème de changement de variable s'appliquent et que $I = \frac{1}{2} \int_{D'} \cos(u/v) d\mu$.
3. Montrer que les hypothèses du théorème de Fubini sont satisfaites et calculer I .

3 Exercice 3 : continuité, dérivation sous l'intégrale et transformation de Fourier (5pt).

On rappelle que si $f \in L^1$, la transformée de Fourier de f , noté $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ est donnée pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu t} f(t) d\mu(t).$$

1. Montrer que si f est paire, $\hat{f}(\nu) = 2 \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \cos(2\pi\nu t) d\mu(t)$.
2. On suppose que $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto t \cdot f(t)$ sont intégrables sur \mathbb{R} . Montrer rigoureusement que $\hat{f}'(\nu) = -2i\pi \mathcal{F}(tf(t))(\nu)$.
3. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} , à dérivée elle-même continue sur \mathbb{R} . On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur \mathbb{R} .
 - (a) Montrer que f admet une limite à l'infini en exploitant l'expression $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds$ (intégrale de Riemann). En raisonnant par l'absurde montrer que f tend vers 0 à l'infini.
 - (b) Montrer que pour tout $N > 0$,

$$\int_{[-N,N]} e^{-2i\pi\nu t} f'(t) d\mu(t) = [e^{-2i\pi\nu t} f(t)]_{-N}^{+N} + 2i\pi\nu \int_{[-N,N]} e^{-2i\pi\nu t} f(t) d\mu(t).$$

- (c) En déduire que $\widehat{f'}(\nu) = (2i\pi\nu)\hat{f}(\nu)$.

4 Exercice 4 : mesurabilité et continuité par morceaux (7pt).

Tribu trace. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, et $R \subset E$. Soit $[\mathcal{E}]_R = \{A \cap R, A \in \mathcal{E}\}$.

1. Montrer que $[\mathcal{E}]_R$ est une tribu. On l'appelle tribu trace de \mathcal{E} sur R .

Soit à présent $(E, \mathcal{O}(E))$ un espace topologique. On rappelle que $\mathcal{O}(E)$ désigne l'ensemble des ouverts de cette topologie. Soit $R \in E$. On peut définir la topologie trace sur R par la famille des ouverts $\mathcal{O}_R(E) = \{A \cap R, A \in \mathcal{O}(E)\}$.

2. Montrer alors que la tribu des boréliens associés à $\mathcal{O}_R(E)$ est la tribu trace sur R de la tribu des boréliens associés à $\mathcal{O}(E)$.

Principe de recollement. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. On appelle partition dénombrable de S , toute suite, finie ou dénombrable $(E_n)_{n \geq 1}$ telle que

- (a) $E_n \in \mathcal{E}$;
- (b) $E_n \cap E_p = \{\}$ si $n \neq p$;
- (c) $E = \cup_{n \geq 1} E_n$.

Soit alors (E, \mathcal{E}) et (F, \mathcal{F}) des espaces mesurables et $(E_n)_{n \geq 1}$ une partition dénombrable de E . Soit f une application de (E, \mathcal{E}) dans (F, \mathcal{F}) telle que pour tout $n \geq 1$, la restriction $f_n = f|_{E_n} : (E_n, [\mathcal{E}]_{E_n}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ est mesurable.

3. Montrer qu'alors f est mesurable. Dédurre des questions précédentes que toute fonction d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} qui est continue par morceaux est borélienne.