



Sujet d'examen — Intégration et applications

Consignes.

- Durée : 1h30 ;
- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- **Calculatrices et tout appareil de communication interdits** ;
- Les parties 1 (exercices 1–4) et 2 (exercices 5 et 6) sont à rendre sur des **copies séparées**.

Partie 1 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants.

- ▷ **Exercice 1** (Théorème de Riemann-Lebesgue). On cherche à montrer le théorème de Riemann-Lebesgue, à savoir que pour toute fonction $x \in L^1(\mathbb{R})$, on a : $\widehat{x}(f) \rightarrow 0$ quand $|f| \rightarrow +\infty$.

On admet pour cela le résultat suivant :

Théorème : soit $h \in \mathbb{R}$ et x une fonction d'un espace $L^p(\mathbb{R})$ quelconque ($p \geq 1$), et, $\tau_h x$ sa translatée, définie par $\tau_h x(t) = x(t - h)$. Alors on montre que $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h x - x\|_p = 0$.

1.1. Exprimer $\widehat{\tau_{-h} x}$ en fonction de \widehat{x} , et montrer alors que pour une certaine valeur de h en fonction de f (qu'on précisera), on a :

$$2\widehat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} (x(t) - x(t+h)) e^{-2j\pi f t} dt$$

1.2. En utilisant le théorème donné ci-dessus, en déduire que $\widehat{x}(f) \rightarrow 0$ quand $|f| \rightarrow +\infty$.

- ▷ **Exercice 2** (Convolution et transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$). On sait que pour deux fonctions x et y de $L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$x * y(f) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y))(f)$$

où $\mathcal{F}(\cdot)$ et $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ désignent respectivement les transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse dans $L^2(\mathbb{R})$.

2.1. Pourquoi n'est-il pas correct d'écrire directement :

$$\mathcal{F}(x * y)(f) = \mathcal{F}(x)(f)\mathcal{F}(y)(f) \quad ?$$

On ne demande pas de calcul, mais une justification liée aux espaces considérés.

- ▷ **Exercice 3** (Dérivée de distributions). Soit a un réel quelconque et f une fonction C^1 sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$, telle que la discontinuité en a soit d'amplitude $\sigma_a = f(a^+) - f(a^-)$ finie.

3.1. Pourquoi peut-on associer à f et f' des distributions régulières ? On note respectivement T_f et $T_{f'}$ ces distributions.

3.2. Exprimer (en le démontrant) T'_f en fonction de $T_{f'}$, de σ_a et de δ_a . **Aide** : on fera attention aux bornes de l'intégration par parties.

- ▷ **Exercice 4** (Convergence de distributions). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f.$$

Aide : on utilisera l'inégalité de Hölder, donnée par : pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Partie 2 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants. On ne justifiera pas le passage de Riemann à Lebesgue.

- ▷ **Exercice 5.**

5.1. Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \cos((x+1)/n) e^{-x^2} dx, \quad n \geq 1.$$

5.2. Déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers l'infini de la suite définie par :

$$\int_{[0,n]} \frac{n}{n+x^2} dx, \quad n \geq 1.$$

- ▷ **Exercice 6.**

6.1. Soient $\beta > \alpha > 0$. Montrer que l'intégrale

$$I := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$$

est bien définie.

6.2. Montrer que

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[\alpha, \beta]} e^{-tx} dt \right) dx.$$

6.3. En déduire la valeur de I .