



## Sujet d'examen – Intégration et applications

### Consignes.

- Durée : 1h30 ;
- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Les parties 1 (exercices 1–4) et 2 (exercices 5 et 6) sont à rendre sur des **copies séparées**.

**Partie 1** (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants.

- ▷ **Exercice 1** (Théorème de Riemann-Lebesgue - 3 points). On veut montrer le théorème de Riemann-Lebesgue, qui stipule que si  $x \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\lim_{|f| \rightarrow +\infty} \widehat{x}(f) = 0$ . On utilisera pour cela le résultat suivant.

**Théorème (admis)** : Soit  $h \in \mathbb{R}$ . Pour une fonction  $x$  donnée, on définit sa translatée  $\tau_h x$  par  $\tau_h x(t) = x(t - h)$ . Alors on montre que pour tout  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h x - x\|_p = 0$ .

1. En exprimant  $\widehat{\tau_{-h}x}(f)$  et en posant  $h = \frac{1}{2f}$ , montrer que

$$2\widehat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} (x(t) - x(t + h)) e^{-2j\pi f t} dt$$

2. Conclure à l'aide du théorème ci-dessus.

- ▷ **Exercice 2** (Stabilité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  par transformée de Fourier - 4 points). On rappelle que l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est constitué des fonctions  $x$  qui sont  $\mathcal{C}^\infty$  et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire telles que

$$t^p x^{(q)}(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

On veut montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par transformée de Fourier, c'est-à-dire que si  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

1. En utilisant le résultat sur la dérivée d'ordre  $k$  d'une transformée de Fourier, montrer que  $\widehat{x}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. En utilisant l'expression de  $TF(x^{(k)})$ , montrer que  $\widehat{x}$  est à décroissance rapide.
3. En utilisant l'expression de la transformée de Fourier de  $(t^q x(t))^{(p)}$ , montrer que  $\widehat{x}^{(q)}$  est à décroissance rapide.

- ▷ **Exercice 3** (Distributions : convergence vers un Dirac - 3 points). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ . On définit la suite de fonctions :  $f_n(x) = n f(nx)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Vérifier que  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  non nul.

2. Montrer que la suite de distributions  $T_{f_n}$  converge vers la distribution de Dirac en 0  $\delta$ .

**Aide** : on utilisera le théorème de la convergence dominée.

3. Comment interprétez-vous ce résultat ?

▷ **Exercice 4** (Distribution en valeur principale - 1 point). On rappelle que la distribution notée  $\text{vp}(\frac{1}{x})$  est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Déterminer la distribution  $x \text{vp}(\frac{1}{x})$ .

**Partie 2** (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants.

▷ **Exercice 5** (7 points). On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|^{\frac{1}{n}} \cos(x) e^{-x}. \end{aligned}$$

**5.1.** On pose  $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } f_n(x) = 0\}$ .

- Déterminer  $A$ .
- Justifier  $\lambda(A) = 0$  ( $\lambda$  étant la mesure de Lebesgue).

**5.2.**

- Montrer que la suite  $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$  est dominée par une fonction intégrable (au sens de Lebesgue).
- Montrer que la suite  $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$  converge simplement presque partout vers une fonction  $f$  (vous donnerez la fonction  $f$  et l'ensemble sur lequel la convergence a lieu).

**5.3.**

- En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  (indiquer pourquoi les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont mesurables).
- Calculer  $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  en utilisant le lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue (vous justifierez le passage d'une intégrale à l'autre).

▷ **Exercice 6** (Fubini et changement de variable - 6 points). Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}.$$

**6.1.** La fonction  $f: (x, y) \mapsto \cos(\frac{x-y}{x+y})$  est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur  $D$ ? On note  $I = \int_D f d\lambda$ .

**6.2.** On envisage le changement de variable défini par  $u = \phi_1(x, y) = x - y$  et  $v = \phi_2(x, y) = x + y$ . Soit  $D'$  l'image de  $D$  par l'application  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  correspondant à ce changement de variable. On admet que  $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < v < 1, -v < u < v\}$ .

Montrer à l'aide du théorème de changement de variables que

$$I = \frac{1}{2} \int_{D'} \cos\left(\frac{u}{v}\right) d\lambda.$$

**6.3.** Calculer  $I$  à l'aide du théorème de Fubini.