



## Sujet d'examen – Intégration et applications

### Consignes.

- Durée : 1h30 ;
- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Les parties 1 et 2 sont à rendre sur des **copies séparées**.

**Partie 1** (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

**Remarque :** dans tout l'énoncé,  $\int_{[a,b]} f(x)dx$  désigne l'intégrale de Lebesgue  $\int_{[a,b]} f d\lambda$  de  $f$  sur  $[a, b]$  ( $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ ) par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ .

▷ **Exercice 1** (Convolution et transformée de Fourier). Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = e^{-|x|}$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .

1. (3 points) Montrer, par un calcul intégral, que

$$f * f(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}$$

**Aide :** pour  $x \geq 0$ , on découpera le domaine d'intégration en  $] -\infty; 0]$ ,  $[0; x]$ ,  $[x; +\infty[$ , et pour  $x \leq 0$ , on découpera le domaine d'intégration en  $] -\infty; x]$ ,  $[x; 0]$ ,  $[0; +\infty[$ .

2. (2 points) Calculer explicitement la transformée de Fourier de  $f$ .
3. (1 point) Calculer alors à l'aide des points précédents, **et en justifiant l'utilisation des formules appropriées**, la transformée de Fourier de  $(1 + |x|)e^{-|x|}$ .

▷ **Exercice 2** (Distributions). Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $T$  une distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . On considère les deux énoncés suivants :

- a)  $\langle T, \varphi \rangle = 0$
- b)  $\varphi T = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

On veut montrer que ces deux énoncés ne sont pas équivalents, plus précisément que b) implique a), mais que la réciproque est fausse.

**Pour montrer que a) n'implique pas b) :**

Soient  $T = \delta'$  et  $\varphi$  une fonction identiquement égale à 1 au voisinage de 0.

1. (1 point) Vérifier que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

2. (2 points) Soit  $\psi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\psi'(0) \neq 0$ . Montrer alors que  $\langle \varphi T, \psi \rangle \neq 0$ .

**Pour montrer que b) implique a) :**

Soient  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telles que  $\varphi T = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\psi$  soit identiquement égale à 1 sur le support de  $\varphi$ .

(2 points) En calculant  $\langle \varphi T, \psi \rangle$ , montrer que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

**Partie 2** (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**). Les exercices sont indépendants.

▷ **Exercice 3.** Les questions sont indépendantes les unes des autres.

On pose  $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$  et on définit

$$\begin{aligned} \mu: \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**3.1.** Montrer que la famille  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\mathbb{R}$ .

**3.2.** Montrer que  $\mu$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ .

**3.3.** Soit  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,  $A \notin \mathcal{A}$ . Soit

$$\begin{aligned} f_A: (\mathbb{R}, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\})) \\ x &\longmapsto f_A(x) = \mathbb{1}_A(x). \end{aligned}$$

La fonction  $f_A$  est-elle mesurable ?

**3.4.** On se place sur l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ . Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{A}$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose  $A$  dénombrable et  $B$  non dénombrable. On pose  $f = \alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_B$ . Calculer  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ .

▷ **Exercice 4.** On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = |\sin(x)|^{\frac{1}{n}} x e^{-x}. \end{aligned}$$

**4.1.** On pose  $A := \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } f_n(x) = 0\right\}$ .

a) Déterminer  $A$ .

b) Justifier  $\lambda(A) = 0$  ( $\lambda$  étant la mesure de Lebesgue).

**4.2.** a) Soit  $b \in ]0, 1]$ . On pose  $\varphi(y) := b^y = e^{y \ln b}$ . Montrer que  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

b) Montrer que la suite  $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$  est croissante et converge simplement presque partout vers une fonction  $f$  (vous donnerez la fonction  $f$  et l'ensemble sur lequel la convergence a lieu).

**4.3.** a) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  (indiquer pourquoi les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont mesurables).

b) Calculer  $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  en utilisant le lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue.