



## Sujet d'examen – Intégration et applications

### Consignes.

- Documents autorisés : **2 feuilles A4 recto-verso manuscrites** ;
- Pour qu'une réponse soit valide, elle doit s'appuyer sur des théorèmes du cours ;
- Les parties 1 (exercices 1 et 2) et 2 (exercices 3 et 4) sont à rendre sur des **copies séparées**.

### Partie 1 (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

▷ **Exercice 1** (Principe d'incertitude d'Heisenberg - 8 points).

**Remarque.** Dans cet exercice, les intégrales considérées sont des intégrales de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'objectif de cet exercice est de démontrer une formule reliant la localisation temporelle d'un signal à sa localisation fréquentielle. Dans un autre contexte, cette formule correspond au principe d'incertitude d'Heisenberg, qui exprime qu'on ne peut pas déterminer de façon (très) précise à la fois la position et la vitesse d'une particule.

Plus précisément, soit  $x$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continûment dérivable, telle que  $x$ ,  $x'$ , et  $t \mapsto tx(t)$  soient dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On pose

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt \\ \sigma_{\widehat{x}}^2 &= \int_{\mathbb{R}} f^2 |\widehat{x}(f)|^2 df\end{aligned}$$

$\sigma_x^2$  et  $\sigma_{\widehat{x}}^2$  sont appelées respectivement dispersion d'énergie de  $x$  en temps et dispersion d'énergie en fréquence. On va alors montrer que

$$\sigma_x \sigma_{\widehat{x}} \geq \frac{E}{4\pi}$$

où  $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$  est l'énergie de  $x$ . On admettra pour cela les deux résultats suivants :

- a)  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} t|x(t)|^2 = 0$
- b)  $\widehat{x'}(f) = 2i\pi f \widehat{x}(f)$  (noter qu'on considère des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  et non de  $L^1(\mathbb{R})$ )

1. Exprimer  $\sigma_{\widehat{x}}^2$  en fonction d'une intégrale sur  $x'$  (on justifiera le calcul).
2. D'autre part, en utilisant le fait que  $(x\overline{x})' = x'\overline{x} + x\overline{x'}$  ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} t (|x(t)|^2)' dt \right| \leq 4\pi \sigma_x \sigma_{\widehat{x}}$$

**Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwarz** : si  $x$  et  $y$  sont deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} |y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

3. Calculer alors  $\int_{\mathbb{R}} t (|x(t)|^2)' dt$  en utilisant le résultat **a)** ci-dessus, et conclure.

▷ **Exercice 2** (Distributions - 4 points). Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $T$  une distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . On considère les deux énoncés suivants :

**a)**  $\langle T, \varphi \rangle = 0$

**b)**  $\varphi T = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

On veut montrer que ces deux énoncés ne sont pas équivalents, plus précisément que **b)** implique **a)**, mais que la réciproque est fausse.

**Pour montrer que a) n'implique pas b) :**

Soient  $T = \delta'$  et  $\varphi$  une fonction identiquement égale à 1 au voisinage de 0.

1. Vérifier que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .
2. Soit  $\psi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\psi'(0) \neq 0$ . Montrer alors que  $\langle \varphi T, \psi \rangle \neq 0$ .

**Pour montrer que b) implique a) :**

Soient  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telles que  $\varphi T = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\psi$  soit identiquement égale à 1 sur le support de  $\varphi$ . En calculant  $\langle \varphi T, \psi \rangle$ , montrer que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

**Partie 2** (Cette partie est à rendre sur une **copie séparée**).

▷ **Exercice 3** (7 points). On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = |\sin(x)|^{\frac{1}{n}} x e^{-x}. \end{aligned}$$

**3.1.** On pose  $A := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } f_n(x) = 0\}$ .

- a) Déterminer  $A$ .
- b) Justifier  $\lambda(A) = 0$  ( $\lambda$  étant la mesure de Lebesgue).

**3.2.**

- a) Soit  $b \in ]0, 1]$ . On pose  $\varphi(y) := b^y = e^{y \ln b}$ . Montrer que  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
- b) Montrer que la suite  $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$  est croissante et converge simplement presque partout vers une fonction  $f$  (vous donnerez la fonction  $f$  et l'ensemble sur lequel la convergence a lieu).

**3.3.**

- a) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  (indiquer pourquoi les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont mesurables).
- b) Calculer  $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda$  en utilisant le lien entre intégrales de Riemann et de Lebesgue (vous justifierez le passage d'une intégrale à l'autre).

▷ **Exercice 4** (9 points). Les questions sont indépendantes les unes des autres.

**4.1.** On note pour  $A \subset \mathbb{R}$ , son symétrique  $-A = \{-x \mid x \in A\}$ . Montrer que la famille  $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A = -A\}$  est une tribu.

**4.2.** Soit  $m$  une mesure finie sur  $\mathcal{B}([0, 1])$ . Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **continue**. Montrer que  $f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), m)$ .

**4.3.** Soit  $\delta_a$  la mesure de Dirac en  $a \in \mathbb{R}$ , définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Soit  $f$  mesurable de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et positive. Calculer (en justifiant)  $\int_{\mathbb{R}} f d\delta_a$ .

**4.4.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable pour la mesure de Lebesgue et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et continue. On définit  $\varphi(u, x) := g(u - x)f(x)$ , la convolée de  $f$  et  $g$  est alors donnée par

$$u \mapsto (f \star g)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u, x) d\lambda(x).$$

Montrer à l'aide du théorème de continuité globale, que  $f \star g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .