



## TD 3 — Intégrales et théorèmes limites

- ▷ **Exercice 1.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit  $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Montrer que si  $\exists N \in \mathbb{N}$ , t.q.  $\int_E f_N d\mu < +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

**Remarque.** On rappelle que  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue.

- ▷ **Exercice 2.** Justifier que l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann coïncident pour les fonctions suivantes et calculer sa valeur.

**2.1.**  $\sin(x)$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .

**2.2.**  $e^{-x} \cos(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2.3.**  $\frac{1}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2.4.**  $\frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,4]}(x) + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]4,+\infty[}(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Remarque.** Dans le restant des deux TD, on s'affranchira de la démonstration systématique de l'équivalence entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue.

- ▷ **Exercice 3.** Pour chacune des suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions boréliennes de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda.$$

**3.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$ .

**3.2.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos x \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ .

- ▷ **Exercice 4.** On considère l'espace mesuré  $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$ . On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n: \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f_n(x) := \frac{n e^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 x^2}} \end{aligned}$$

mesurable de  $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$  dans  $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ . Utiliser le lemme de Fatou pour montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

*Indication :* on admettra que  $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-x}}{x} d\lambda = +\infty$ .