

# Intégration

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

Olivier COTS

16 septembre 2024



## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

- 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
  - 4.1.1. Définitions
  - 4.1.2. Linéarité
- 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout
  - 4.2.1. Définitions
  - 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout
- 4.3. Introduction à l'espace  $L^1$ 
  - 4.3.1. L'espace  $\mathcal{L}^1$  est un espace vectoriel semi-normé
  - 4.3.2. L'espace  $L^1$  est un espace vectoriel normé
- 4.4. Introduction aux espaces  $L^p$ 
  - 4.4.1. Définitions
  - 4.4.2.  $L^p$ ,  $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel
  - 4.4.3.  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\int_E f \, d\mu$$

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\int_E f \, d\mu$$

**Remarque 4.1.1.** On considère des fonctions mesurables de signe quelconque à valeurs dans  $\mathbb{R}$  pour éviter la forme indéterminée

$$\infty - \infty.$$

Nous avons déjà noté  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions étagées de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et  $\mathcal{M}$  celui des fonctions mesurables de  $(E, \mathcal{A})$  à valeurs dans  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ , i.e.  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ , donc nous n'introduisons pas de nouvelles notations pour  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

**Remarque 4.1.2.** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Nous pouvons toujours écrire  $f$  sous la forme

$$f = f^+ - f^-$$

avec

$$f^+ := f \mathbf{1}_{f>0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad f^- := -f \mathbf{1}_{f<0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

### Définition 4.1.1 – Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Une fonction  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  **admet une intégrale** si  $f^+$  ou  $f^-$  est intégrable.

Si  $f^+$  et  $f^-$  sont intégrables alors on dit que  $f$  est  **$\mu$ -intégrable** (ou **intégrable**).

Si  $f$  admet une intégrale, ce qui est le cas si  $f$  est intégrable, alors on définit **l'intégrale de  $f$  sur  $E$  par rapport à  $\mu$**  par

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

### Définition 4.1.2

On notera  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  ou  $\mathcal{L}^1(\mu)$  ou  $\mathcal{L}^1$ , l'ensemble des fonctions intégrables.

**Remarque 4.1.3.** Bien noter  $\mathcal{L}^1$  car la notation  $L^1$  fera référence à un autre espace.

### Proposition 4.1.3

Soit  $f \in \mathcal{L}^1$ . Alors

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu < +\infty$$

et donc  $|f| \in \mathcal{L}^1$ . **Réciproquement**,  $|f| \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$ .

► Par définition,  $f^+$  et  $f^-$  sont intégrables et

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu < +\infty,$$

par **additivité** (on rappelle que  $|f| = f^+ + f^-$ ). De même, on démontre que  $-\int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$ . ■

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\int_E f \, d\mu$$

**Théorème 4.1.4 – Linéarité de l'intégrale**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

L'espace  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un **espace vectoriel** et l'application

$$\begin{array}{ccc} T: & \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto T(f) := \int_E f \, d\mu \end{array}$$

est une **forme linéaire croissante**.



► Montrons que  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un **espace vectoriel**.

Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{L}^1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puisque

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$$

et puisque par **additivité et homogénéité positive** de l'intégrale sur  $\mathcal{M}_+$

$$\int (|\lambda||f| + |g|) \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu,$$

alors par le **théorème de comparaison**,  $|\lambda f + g|$  est intégrable, donc d'après la **proposition précédente**,  $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$ .

- Montrons que  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$  pour  $f, g$  dans  $\mathcal{L}^1$ .

Tout d'abord, par définition

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ainsi

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \geq 0$$

et donc par **additivité** de l'intégrale sur  $\mathcal{M}_+$  on a

$$\int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f + g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

ce qui donne puisque toutes ces quantités sont finies

$$\int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

autrement dit

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- Montrons que  $\int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$  pour  $f$  dans  $\mathcal{L}^1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Remarquons que  $\lambda f = \lambda(f^+ - f^-) = \lambda f^+ - \lambda f^-$  mais surtout que

$$\lambda > 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-,$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ = -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+.$$

Ainsi, en utilisant l'**homogénéité positive** de l'intégrale sur  $\mathcal{M}_+$ , on a :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \int \lambda f \, d\mu = \int \lambda f^+ \, d\mu - \int \lambda f^- \, d\mu = \lambda \int f^+ \, d\mu - \lambda \int f^- \, d\mu,$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \int \lambda f \, d\mu = \int -\lambda f^- \, d\mu - \int -\lambda f^+ \, d\mu = -\lambda \int f^- \, d\mu - (-\lambda) \int f^+ \, d\mu.$$

et donc dans les deux cas  $\int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$ .

Les deux points précédents démontrent la linéarité de l'application  $T : T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ . Ainsi  $T$  est bien une forme linéaire, car définie sur un espace vectoriel et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- Montrons que  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$  pour  $f, g$  dans  $\mathcal{L}^1$  si  $f \leq g$ , i.e. montrons que  $T$  est croissante.

En fait,  $T$  est une forme linéaire **positive** donc croissante.

En effet, posons  $h := g - f$ . Alors  $h = h^+ \geq 0$  et puisque alors  $h \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  il vient que  $T(h) \geq 0$  ( $T$  est donc positive).

Mais  $T(h) = T(g) - T(f)$  par **linéarité** de  $T$  et donc  $T(g) \geq T(f)$ .



## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\mu(A) = 0$$

**Définition 4.2.1 – Ensemble négligeable**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

On dit que  $A \in \mathcal{A}$  est un **ensemble négligeable** (ou  $\mu$ -négligeable) si  $\mu(A) = 0$ .

**Remarque 4.2.1.** Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Au lieu d'écrire  $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$  si  $f$  est nulle sauf sur un **ensemble négligeable**, on notera souvent

$$f = 0 \text{ } \mu\text{-presque partout} \quad \text{ou} \quad f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.},$$

ou encore  $f = 0$  p.p., et on dira que  $f$  est  $\mu$ -presque partout nulle.

Cette terminologie bien pratique est définie au slide suivant de manière générale.

### Définition 4.2.2 – Propriété vraie $\mu$ -p.p.

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soient  $A \in \mathcal{A}$  un **ensemble négligeable** et une propriété  $P$  qui dépend de  $x \in E$ .

Si l'on a

$$\{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\} \subset A,$$

alors on dira que  $P(x)$  est vraie "pour  $\mu$ -presque tout  $x$ " ou que  **$P$  est vraie  $\mu$ -p.p.**

**Remarque 4.2.2.** Il est possible dans certains contextes que  $P$  soit fausse sur un ensemble non mesurable inclus dans un ensemble négligeable. Dans ce cas, il serait **incorrect** de dire que " **$P$  est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable**". On peut en revanche toujours dire que " **$P$  est vraie au moins sur le complémentaire d'un ensemble négligeable**".

Pour éviter ces difficultés, il est commode d'introduire la notion de **tribu complétée** à laquelle on ajoute (entres autres) toutes les parties de  $E$  incluses dans un ensemble négligeable. Ainsi, dans ce contexte, on pourra alors toujours dire que " **$P$  est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable**". Cette notion est introduite au chapitre 5.

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\mu(A) = 0$$



**Théorème 4.2.3**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Si  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est nulle p.p., c-à-d si  $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ , alors

$$\int_E f \, d\mu = 0$$

et la réciproque est vraie si  $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ .

► Nous avons, cf. **Chapitre 3**, que pour  $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  :

$$\int_E f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Or si  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est nulle p.p., alors  $f^+ = f\mathbb{1}_{f>0}$  et  $f^- = -f\mathbb{1}_{f<0}$  le sont aussi, et puisque  $f^+$  et  $f^-$  sont positives alors leurs intégrales sont nulles. Ainsi,  $f \in \mathcal{L}^1$  et

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = 0.$$



**Corollaire 4.2.4**

Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et  $A \in \mathcal{A}$  un ensemble négligeable. Alors

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

► Par **définition**,

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu,$$

et par le **théorème précédent**,  $\int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu = 0$ . ■

**Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$  t.q.  $f$  intégrable sur  $A \cup B$  et  $\mu(A \cap B) = 0$ .

Alors

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Exercice : faire l'exercice.

**Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$  t.q.  $f$  intégrable sur  $A \cup B$  et  $\mu(A \cap B) = 0$ .

Alors

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

► On a toujours  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ . Puisque  $f$  intégrable sur  $A \cup B$ , alors  $f$  intégrable sur  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ , cf.  $|f\mathbb{1}_A| \leq |f\mathbb{1}_{A \cup B}|$ , etc.

Par **linéarité** de l'intégrale

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu - \int_{A \cap B} f \, d\mu$$

mais  $\int_{A \cap B} f \, d\mu = 0$  car  $\mu(A \cap B) = 0$ , cf. **corollaire précédent**. ■

**Lemme 4.2.1.** *Si  $f = g$   $\mu$ -p.p., alors  $f$  est intégrable (resp. admet une intégrale) ssi  $g$  est intégrable (resp. admet une intégrale).*

► Comme  $f = g$   $\mu$ -p.p., alors il est clair que  $f^+ = g^+$   $\mu$ -p.p. et  $f^- = g^-$   $\mu$ -p.p.

Il suffit donc de montrer que pour toutes  $f, g$  dans  $\mathcal{M}_+$ , si  $f = g$   $\mu$ -p.p. alors

$$\int f \, d\mu < +\infty \quad \text{ssi} \quad \int g \, d\mu < +\infty.$$

En fait, nous avons déjà démontré mieux (cf. **Chapitre 3**) :

$\forall f, g \in \mathcal{M}_+$ , si  $f = g$   $\mu$ -p.p. alors on a l'égalité  $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . ■

**Théorème 4.2.6**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soient  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  et  $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  t.q.  $f = g$   $\mu$ -p.p. Alors,

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

► D'après le lemme 4.2.1,  $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ . Par **linéarité** de l'intégrale,

$$\int f \, d\mu - \int g \, d\mu = \int (f - g) \, d\mu.$$

La fonction  $f - g$  est nulle presque partout donc d'après le **théorème précédent**,

$$\int (f - g) \, d\mu = 0.$$



■ **Remarque 4.2.3.** On retiendra que deux fonctions égales p.p. ont la même intégrale.

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$f \sim_{\mu} g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

**Définition 4.3.1**

Soit  $F$  un espace vectoriel. Une fonction  $N: F \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée **norme** si

- i)  $\forall u \in F$  :  $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_F$  (séparation) ;
- ii)  $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$  :  $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$  (absolue homogénéité) ;
- iii)  $\forall (u, v) \in F^2$  :  $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$  (sous-add. / inég. triangulaire).

Si i) est remplacé par

$$\text{i')} \quad N(0_F) = 0,$$

alors on parle de **semie-norme**.

**Remarque 4.3.1.** On rappelle qu'une norme  $N$  sur un espace vectoriel  $F$  induit une topologie sur  $F$ , la topologie induite par la distance  $d(u, v) := N(u - v)$ .



On rappelle que l'espace  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  (ou  $\mathcal{L}^1$ ) est l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  qui sont  $\mu$ -intégrables, c-à-d t.q.

$$\int_E |f| \, d\mu < +\infty.$$

Pour toute  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ , on pose

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_E |f| \, d\mu.$$

On a alors le résultat suivant :

### Proposition 4.3.2

L'espace  $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$  est un espace vectoriel semi-normé.

**Proposition 4.3.2**

L'espace  $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$  est un espace vectoriel semi-normé.

► Nous avons déjà que  $\mathcal{L}^1$  est un espace vectoriel, cf. Section 4.1.

■ Montrons que  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$  est une semi-norme.

i) Si  $f = 0 \in \mathcal{L}^1$  alors  $|f| = 0$  et donc  $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f| d\mu = 0$  ;

ii) Soit  $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}^1$ . Alors par **homogénéité positive** de l'intégrale sur  $\mathcal{M}_+$ ,

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}^1} ;$$

iii) Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{L}^1$ . Alors  $|f + g| \leq |f| + |g|$  donc par **croissance** puis **additivité** de l'intégrale sur  $\mathcal{M}_+$ ,

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f+g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1} + \|g\|_{\mathcal{L}^1}$$



## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$f \sim_{\mu} g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Pour passer d'une semie-norme à une norme, on identifie les vecteurs  $u$  et  $v$  dans  $F$  t.q.

$$N(u - v) = 0.$$

Rigoureusement, on définit **l'espace quotient** de  $F$  par la relation d'équivalence

$$u \sim v \iff N(u - v) = 0,$$

c-à-d l'ensemble constitué des classes d'équivalences de  $\sim$  :

► Montrons que  $\sim$  est une relation d'équivalence.

- (réflexivité).  $N(u - u) = N(0_F) = 0 \Rightarrow u \sim u$  ;
- (symétrie).  $N(u - v) = 0 = N(v - u)$  par absolue homogénéité de  $N$  ;
- (transitivité).  $N(u - v) = N(v - w) = 0 \Rightarrow N(u - w) = N(u - v + v - w) \leq N(u - v) + N(v - w) = 0$  par l'inégalité triangulaire. ■

**Notation.** On note  $[u] := \{v \in F \mid u \sim v\}$  la classe d'équivalence de  $u \in F$  et on définit l'espace quotient de  $F$  par la relation d'équivalence  $\sim$  par :

$$F/\sim := \bigcup \{[u] \mid u \in F\}.$$

**Exercice 4.3.1.** Montrer  $(u' \in [u] \text{ et } v' \in [v]) \Rightarrow \lambda u' + \mu v' \in [\lambda u + \mu v]$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

On introduit pour toutes  $f, g$  dans  $\mathcal{L}^1$  la relation d'équivalence notée  $\sim_\mu$  définie par la semi-norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$  :

$$f \sim_\mu g \iff \|f - g\|_{\mathcal{L}^1} = 0 \iff |f - g| = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.} \iff f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

**Notation.** On note pour  $f \in \mathcal{L}^1$ ,

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^1 \mid g \sim_\mu f\} = \{g \in \mathcal{L}^1 \mid g = f \text{ } \mu\text{-p.p.}\}$$

sa classe d'équivalence par la relation  $\sim_\mu$ .

**Remarque fondamentale.** Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence ;

$$\lambda[f] + \mu[g] := [\lambda f + \mu g].$$

Ceci fait de l'espace quotient, un **espace vectoriel**.

**Remarque 4.3.2.** On fera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer fonctions et classes d'équivalences, c-à-d qu'on utilisera le même symbole  $f$  pour la classe et la fonction. Ceci n'est bien entendu pas dangereux.

## Définition 4.3.3

On note  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  ou  $L^1$ , l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de  $\mathcal{L}^1$  par la relation d'équivalence  $f \sim_\mu g \iff f = g$   $\mu$ -p.p., i.e.  $L^1 := \mathcal{L}^1 / \sim_\mu$ .

On définit la fonction  $\|\cdot\|_{L^1}$  sur  $L^1$  par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^1}: \quad L^1 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [f] &\longmapsto \|[f]\|_{L^1} := \|f\|_{\mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

où  $f \in [f]$  est n'importe quel représentant de la classe d'équivalence, car si  $f \sim_\mu g$  alors  $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|g\|_{\mathcal{L}^1}$ .

**Remarque 4.3.3.** Bien entendu,  $\|\cdot\|_{L^1}$  est une norme sur  $L^1$ .

**Théorème 4.3.4**

L'espace  $(L^1(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$  est un espace vectoriel normé.

**Exemple 4.3.2.** On note  $l^1$  l'espace  $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$  où  $m := \text{card}$  est la mesure de comptage. Soit  $u \in l^1$ , alors

$$\|u\|_{l^1} = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter  $\mathcal{L}^1$  car  $\|u\|_{l^1} = 0$  implique  $u = 0$ .

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\int_E |f|^p d\mu$$



Pour simplifier on ne s'intéressera qu'à  $L^p$  en refaisant directement l'assimilation entre une fonction et sa classe d'équivalence (tous les raisonnements précédents faisant le lien entre  $\mathcal{L}^p$  et  $L^p$  étant similaires).

On étend la définition des espaces  $L^1$  aux fonctions dont la puissance  $p$  est intégrable.

#### Définition 4.4.1

Soit un réel  $0 < p < +\infty$ .

On appelle  $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$  ou  $L^p$  l'ensemble des fonctions mesurables telles que

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty.$$

#### Exemple 4.4.1.

$$\forall p > 1, f(x) = \frac{1}{x^p} \in L^p([1, +\infty[, \mathcal{B}([1, +\infty[), \lambda)$$

Le cas  $p = +\infty$  :

### Définition 4.4.2

$L^\infty$  est l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées, i.e. telles que

$$\sup \text{ess } |f| < +\infty,$$

où la borne supérieure essentielle de  $f$  est définie par

$$\sup \text{ess } f := \inf \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(]a, \infty[)) = 0 \right\}.$$

**Remarque 4.4.1.**  $a$  est un majorant de  $f$  si  $f^{-1}(]a, \infty[) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$  est vide. La borne supérieure classique est définie par :  $\sup f := \inf \{a \in \mathbb{R} \mid f^{-1}(]a, \infty[) = \emptyset\}$ . C'est le plus petit des majorants de  $f$ . La borne supérieure essentielle est donc un majorant de  $f$  mais seulement pour presque tout  $x$ .

**Remarque 4.4.2.** On a toujours  $\inf f \leq \inf \text{ess } f \leq \sup \text{ess } f \leq \sup f$ .

**Exemple 4.4.2.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \arctan x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \in L^\infty$$

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\int_E |f|^p d\mu$$

**Proposition 4.4.3**

Soit un réel  $0 < p \leq +\infty$ . L'espace  $L^p$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

► La stabilité par la multiplication par un scalaire est claire. Pour l'addition on se donne  $f$  et  $g$  dans  $L^p$ . Alors  $f + g$  est bien mesurable et on distingue 2 cas :

- $p = +\infty$

D'après l'inégalité triangulaire et la définition du sup essentiel :

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \sup \text{ess } |f| + \sup \text{ess } |g| \quad (\text{presque partout}).$$

Par passage au sup essentiel :  $\sup \text{ess } |f + g| \leq \sup \text{ess } |f| + \sup \text{ess } |g|$ .

- $0 < p < +\infty$

Notons  $h = \max(|f|, |g|)$ . On a

$$|f + g|^p \leq (2h)^p = 2^p h^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

(faire une disjonction des cas pour la dernière inégalité). D'où le résultat en intégrant. ■

## Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ , $L^1$ et $L^p$

### 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

#### 4.1.1. Définitions

#### 4.1.2. Linéarité

### 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

#### 4.2.1. Définitions

#### 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

### 4.3. Introduction à l'espace $L^1$

#### 4.3.1. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel semi-normé

#### 4.3.2. L'espace $L^1$ est un espace vectoriel normé

### 4.4. Introduction aux espaces $L^p$

#### 4.4.1. Définitions

#### 4.4.2. $L^p$ , $0 < p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel

#### 4.4.3. $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ , est un espace vectoriel normé

$$\int_E |f|^p d\mu$$

On définit naturellement une application, qui sera une norme sur  $L^p$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$  :

#### Définition 4.4.4

Pour tout réel  $0 < p < +\infty$  on pose pour  $f$  dans  $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,

$$\|f\|_{L^p} \quad \text{ou} \quad \|f\|_p := \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Pour  $p = +\infty$ , on pose  $\|f\|_{L^\infty}$  ou  $\|f\|_\infty := \sup \text{ess } |f|$ .

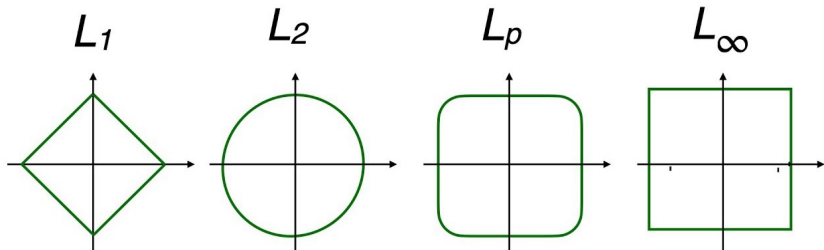
#### Remarque 4.4.3.

- En dimension finie on définit pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ . Tous les résultats de ce chapitre sont transposables en dimension finie.
- On peut montrer que  $\forall f \in L^\infty$ ,  $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$  (et de même sur  $\mathbb{R}^n$ ).

On va maintenant montrer que  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  est un espace vectoriel normé pour  $1 \leq p \leq +\infty$ . On aura besoin de l'inégalité de Minkowski qui résulte de celle de Hölder.

**Proposition 4.4.5**

Soit un réel  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors,  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $L^p$ .



L'inégalité suivante est fondamentale dans les espaces  $L^p$ .

### Théorème 4.4.6 – Inégalité de Hölder

Soit  $(E, A, \mu)$  un espace mesuré,  $p, q > 0$  des exposants conjugués (i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) et  $f$  et  $g$  des fonctions de  $L^p$  et  $L^q$  respectivement. Alors  $fg \in L^1$  et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Plus généralement si  $p$  et  $q$  sont tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ , alors  $fg \in L^r$  et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Pour le démontrer on utilise l'inégalité de Young :

**Lemme 4.4.1.** Soit  $a, b \geq 0$  et  $p, q > 0$  deux exposants conjugués. Alors  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

► (Preuve du lemme). Le logarithme étant concave sur  $\mathbb{R}_+$ , pour tout  $a, b > 0$  on a  $\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$  et on passe à l'exponentielle. ■



► (Preuve de l'inégalité de Hölder). Soit  $p, q > 0$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ .

On la montre d'abord pour  $f$  et  $g$  telles que  $\|f\|_p = 1$  et  $\|g\|_q = 1$ . Ceci résulte de l'inégalité de Young appliquée aux exposants  $\tilde{p} = \frac{p}{r}$  et  $\tilde{q} = \frac{q}{r}$ . En effet on a bien  $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$ . D'où,  $\forall x \in E$ ,

$$|f(x)|^r |g(x)|^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} |f(x)|^p + \frac{1}{\tilde{q}} |g(x)|^q$$

donc par intégration

$$\|fg\|_r^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} \|f\|_p^p + \frac{1}{\tilde{q}} \|g\|_q^q = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1.$$

Si  $\|f\|_p = 0$  ou  $\|g\|_q = 0$  l'inégalité est vérifiée.

On passe maintenant au cas général en appliquant le cas particulier précédent aux fonctions  $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$  et  $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$ . ■

■ **Remarque 4.4.4.** Pour  $p = q = 2$  on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

■ **Remarque 4.4.5.** L'inégalité reste vraie pour  $(p, q) = (1, +\infty)$  avec  $1/\infty = 0$ .

**Exercice 4.4.3.** Soit  $p > 1$ . Donner une fonction qui est dans  $L^1$  mais pas dans  $L^p$  et une fonction qui est dans  $L^p$  mais pas dans  $L^1$ .

Exercice : faire l'exercice.

**Exercice 4.4.3.** Soit  $p > 1$ . Donner une fonction qui est dans  $L^1$  mais pas dans  $L^p$  et une fonction qui est dans  $L^p$  mais pas dans  $L^1$ .

► Par exemple  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$  sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . ■

**Exercice 4.4.3.** Soit  $p > 1$ . Donner une fonction qui est dans  $L^1$  mais pas dans  $L^p$  et une fonction qui est dans  $L^p$  mais pas dans  $L^1$ .

► Par exemple  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$  sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . ■

**Exercice 4.4.4.** Soit  $(E, A, \mu)$  un espace mesuré tel que  $E$  soit de mesure finie, i.e.  $\mu(E) = M < +\infty$ . Soient  $0 < p < q < +\infty$ . Montrer que  $L^\infty \subset L^q \subset L^p$ .

Exercice : faire l'exercice.

**Exercice 4.4.3.** Soit  $p > 1$ . Donner une fonction qui est dans  $L^1$  mais pas dans  $L^p$  et une fonction qui est dans  $L^p$  mais pas dans  $L^1$ .

► Par exemple  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$  sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . ■

**Exercice 4.4.4.** Soit  $(E, A, \mu)$  un espace mesuré tel que  $E$  soit de mesure finie, i.e.  $\mu(E) = M < +\infty$ . Soient  $0 < p < q < +\infty$ . Montrer que  $L^\infty \subset L^q \subset L^p$ .

► L'inégalité de Hölder donne en prenant  $g = 1$  et en notant  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$ , c-à-d  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$  :

$$\|fg\|_p = \|f\|_p \leq \|f\|_q \|1\|_r = M^{\frac{1}{r}} \|f\|_q.$$

Ce qui montre que si  $f \in L^q$  alors  $f \in L^p$ . ■

On aurait aussi pu écrire :

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \left( \int_E |f|^q d\mu \right) \\ &= \left( \int_{\{|f| \leq 1\}} |f|^q d\mu \right) + \left( \int_{\{|f| > 1\}} |f|^q d\mu \right) \\ &\leq \mu(\{|f| \leq 1\}) + \left( \int_{\{|f| > 1\}} |f|^q d\mu \right) \\ &\leq \mu(E) + \left( \int_{\{|f| > 1\}} |f|^p d\mu \right) \\ &\leq \mu(E) + \left( \int_E |f|^p d\mu \right).\end{aligned}$$

Pour montrer  $L^\infty \subset L^q$  on note que si  $f \in L^\infty$  alors  $f$  est finie p.p. :  $|f| \leq K < +\infty$ . D'où en élevant à la puissance  $q$  et en intégrant

$$\|f\|_q^q \leq K^q \mu(E) < +\infty.$$

C'est l'inégalité triangulaire dans les espaces  $L^p$  pour  $p \geq 1$ .

### Théorème 4.4.7 – Inégalité de Minkowski

Soit  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^p$ . On a alors  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

► Pour  $p = 1$ , resp.  $p = +\infty$ , c'est clair, cf. Section 2, resp. Proposition 4.4.3. Sinon, si  $\|f+g\|_p = 0$ , l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, en appliquant successivement l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{R}$  et l'inégalité de Hölder avec  $q = \frac{p}{p-1}$ , il vient

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p d\mu \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left( \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right) \left( \int |f+g|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})} d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$



De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour  $(L^1, \|\cdot\|_1)$  que

### Théorème 4.4.8

L'espace  $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$  est un espace vectoriel normé pour  $p \in [1, +\infty]$ .

**Remarque 4.4.6.** L'inégalité est inversée pour  $0 < p < 1$  (car  $x \Rightarrow x^p$  n'est plus convexe mais concave sur  $\mathbb{R}_+$ ). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme,  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  n'est donc pas un espace vectoriel normé pour  $0 < p < 1$ .

**Exercice 4.4.5.** Soit  $0 < p < +\infty$  et  $f_n \rightarrow f$  simplement. On suppose :  $\exists g \geq 0$  dans  $L^p$  telle que  $\forall n, |f_n| \leq g$ . Montrer que  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p$  (i.e.  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ).

Exercice : faire l'exercice après avoir vu le chapitre 5.



De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour  $(L^1, \|\cdot\|_1)$  que

### Théorème 4.4.8

L'espace  $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$  est un espace vectoriel normé pour  $p \in [1, +\infty]$ .

**Remarque 4.4.6.** L'inégalité est inversée pour  $0 < p < 1$  (car  $x \Rightarrow x^p$  n'est plus convexe mais concave sur  $\mathbb{R}_+$ ). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme,  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  n'est donc pas un espace vectoriel normé pour  $0 < p < 1$ .

**Exercice 4.4.5.** Soit  $0 < p < +\infty$  et  $f_n \rightarrow f$  simplement. On suppose :  $\exists g \geq 0$  dans  $L^p$  telle que  $\forall n, |f_n| \leq g$ . Montrer que  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p$  (i.e.  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ).

► Par passage à la limite dans  $|f_n| \leq g$  on a  $|f| \leq g$ . Donc par inégalité triangulaire  $|f_n - f| \leq 2g$ , puis  $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$ , où  $g^p$  est une fonction intégrable indépendante de  $n$ . D'après le théorème de convergence dominée on peut donc passer à la limite dans

$$\int_E |f_n - f|^p d\mu$$

ce qui fournit  $\|f_n - f\|_p \Rightarrow 0$ . ■