

# Intégration

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

Olivier COTS

16 septembre 2024



Le but de ce chapitre 5 est :

- d'étendre les théorèmes de convergence déjà vus ("limites sous le signe intégrale"), et d'en proposer de nouveaux pour le cas d'une fonction mesurable  $f$  par rapport à une mesure  $\mu$  sur un espace mesurable  $(E, \mathcal{A})$  :

$$\int_E f \, d\mu$$

- de faire le lien, quand il est possible, entre les intégrales de Lebesgue et Riemann ;
- d'étudier quelques propriétés d'intégrales dépendant de paramètres.

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

#### 5.1.1. Espace mesuré complet

#### 5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

#### 5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

#### 5.2.1. Intégrale sur un segment

#### 5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

#### 5.3.1. Continuité

#### 5.3.2. Dérivabilité

$$\int_E f \, d\mu$$

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

#### 5.1.1. Espace mesuré complet

#### 5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

#### 5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

#### 5.2.1. Intégrale sur un segment

#### 5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

#### 5.3.1. Continuité

#### 5.3.2. Dérivabilité

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu$$

**Définition 5.1.1 – Espace mesuré complet**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Il est appelé **espace mesuré complet** si

$$[N \subset A, \text{ avec } N \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0] \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

**Définition 5.1.2 – Convergence  $\mu$ -p.p.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

On dit que  $(f_n)$  **converge presque partout** vers  $f$  (et on note  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ ) si

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ négligeable tel que } [x \notin A] \Rightarrow [f_n(x) \rightarrow f(x)].$$

**Remarque 5.1.1.** La convergence simple implique la convergence  $\mu$ -p.p..

**Remarque 5.1.2.** La définition de la convergence  $\mu$ -p.p. est une application de la définition 4.2 à la propriété  $P(x) = "f_n(x) \text{ converge vers } f(x)"$ .

**Proposition 5.1.3**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et soit  $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))^{\mathbb{N}} = \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$  t.q.  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ .

Alors  $\exists g \in \mathcal{M}$  t.q.  $f = g$   $\mu$ -p.p. et si  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est **complet** alors  $f \in \mathcal{M}$ .

► Par **hypothèse**,  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f : \exists A \in \mathcal{A}$  t.q.  $\mu(A) = 0$  et  $\forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

Remarquons que,

$$\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, a]) = (f^{-1}([-\infty, a]) \cap A) \cup (f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c).$$

D'une part,  $f^{-1}([-\infty, a]) \cap A \subset A$ , avec  $A \in \mathcal{A}$  t.q.  $\mu(A) = 0$ . Donc si  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace mesuré complet, alors **par définition**

$$f^{-1}([-\infty, a]) \cap A \in \mathcal{A}.$$

Supposons donc  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  complet et montrons maintenant que  $f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c \in \mathcal{A}$ .

### Proposition 5.1.3

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et soit  $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))^{\mathbb{N}} = \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$  t.q.  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ .

Alors  $\exists g \in \mathcal{M}$  t.q.  $f = g$   $\mu$ -p.p. et si  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est **complet** alors  $f \in \mathcal{M}$ .

Posons  $g = \limsup f_n \in \mathcal{M}$  (d'après le chapitre 2). Puisque  $\forall x \in A^c$ ,  $f(x) = g(x)$ , on a  $f = g$   $\mu$ -p.p. et

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c &= \{x \in A^c, f(x) \in [-\infty, a]\} \\ &= \{x \in A^c, g(x) \in [-\infty, a]\} \\ &= g^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c. \end{aligned}$$

Or,  $g$  mesurable de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})) \Rightarrow g^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ .<sup>1</sup>

Par **stabilité** par passage au complémentaire et intersection finie,

$$f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c \in \mathcal{A}.$$

Finalement, par **stabilité** par union finie,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ , et  $f$  mesurable. ■

1.  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  est la tribu engendrée par les intervalles de la forme  $[-\infty, a]$ .

### Théorème 5.1.4 – Tribu et mesure complétées

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Il existe  $\mathcal{B}$  une tribu sur  $E$  et  $\nu$  une mesure sur  $\mathcal{B}$  telles que

- i)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ,
- ii)  $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)$ ,
- iii)  $\forall N \subset E$ , t.q.  $\exists A \in \mathcal{A}$  t.q.  $N \subset A$  et  $\mu(A) = 0$ , on a

$$N \in \mathcal{B} \text{ et } \nu(N) = 0.$$

La tribu  $\mathcal{B}$  est appelée **tribu complétée** de  $\mathcal{A}$  et  $\nu$  **mesure complétée** de  $\mu$ .

L'espace  $(E, \mathcal{B}, \nu)$  est un **espace mesuré complet**.

► Admis. Rq. :  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$ ,  $\mathcal{N} := \{N \subset E \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0\}$ . ■

**Remarque 5.1.3.** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  et  $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  t.q.  $f = g$   $\mu$ -p.p.. Alors  $f$  est mesurable pour la tribu complétée. Ainsi d'après la proposition 5.1.3, si  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$  alors  $f$  est mesurable pour la tribu complétée.



**Exemple 5.1.1.** On connaît déjà l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  où  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est la tribu de Borel sur  $\mathbb{R}$  appelée la tribu de Borel-Lebesgue. Nous avons appelée  $\lambda$ , la mesure de Lebesgue. En toute rigueur, c'est ce que l'on appelle la mesure de Borel-Lebesgue. Par le théorème précédent, on peut compléter la tribu et la mesure. La tribu **complétée** est appelée la **tribu de Lebesgue** et la mesure complétée la **mesure de Lebesgue**.

Notons  $\mathcal{T}_L$  la tribu de Lebesgue. Nous avons

$$\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_L \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Il est possible de montrer que  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  a le même cardinal<sup>2</sup> que  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'ils sont équipotents, autrement dit on peut les mettre en bijection. En revanche,  $\mathcal{T}_L$  a le même cardinal que  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Le fait que  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_L$  n'ont pas le même cardinal nous indique qu'il existe des ensembles mesurables (pour  $\mathcal{T}_L$ ) non boréliens : voir l'exemple de Luzin, 1927.

On peut montrer qu'il existe des ensembles non mesurables :  $\mathcal{T}_L \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Cependant, ces ensembles sont très particuliers : voir l'ensemble de Vitali (1905) ou le paradoxe de Banach-Tarski. Ces deux exemples font appel à l'axiome du choix (ce qui est nécessaire pour construire des ensembles non mesurables).

---

2. Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments. Pour un ensemble infini, c'est la classe d'équipotence.

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

5.1.1. Espace mesuré complet

5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

5.2.1. Intégrale sur un segment

5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

5.3.1. Continuité

5.3.2. Dérivabilité

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu$$

### Théorème 5.1.5 – Convergence monotone

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , qui converge  $\mu$ -p.p. vers  $f$  **mesurable**.

Alors

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu.$$

**Remarque 5.1.4.** Ce théorème étend le théorème de Beppo-Levi, vu au chapitre 3, au cadre de la convergence  $\mu$ -p.p.

**Remarque 5.1.5.** Si l'espace mesuré est complet alors l'hypothèse  $f$  mesurable est inutile. Si l'espace n'est pas complet et  $f$  non mesurable alors le résultat reste vrai si l'on remplace  $f$  par une fonction  $g$  mesurable t.q.  $f = g$   $\mu$ -p.p. (qui existe cf. Proposition 5.1.3).

► *Idée :*

Appliquer le théorème de Beppo-Levi sur la partie de  $E$  sur laquelle la convergence simple a lieu. Le complémentaire de celle-ci étant de mesure nulle, les intégrales de  $f$  et des  $f_n$  sur ce dernier sont nulles.

► (Preuve du théorème de convergence monotone).

Par hypothèse,  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f : \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

1. Montrons que  $\lim_n \int_{A^c} f_n d\mu = \int_{A^c} f d\mu$ .

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{f}_n = f_n \mathbb{1}_{A^c}$ . La suite  $(\tilde{f}_n)$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}_n \in \mathcal{M}_+$  comme produit de fonctions mesurables positives ( $A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{1}_{A^c}$  mesurable) ;
- $(\tilde{f}_n)$  converge simplement vers  $\tilde{f} := f \mathbb{1}_{A^c}$  par hypothèse sur la suite  $(f_n)$  ;
- la suite  $(\tilde{f}_n)$  est croissante :

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \tilde{f}_n(x) = 0 = \tilde{f}_{n+1}(x). \quad \forall x \in A^c, \tilde{f}_n(x) = f_n(x) \\ \leq f_{n+1}(x) \quad \text{par croissance de } (f_n) \\ \leq \tilde{f}_{n+1}(x). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_n \int_E \tilde{f}_n d\mu = \int_E \tilde{f} d\mu \Leftrightarrow \lim_n \int_E f_n \mathbb{1}_{A^c} d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{A^c} d\mu.$$

2. Comme  $\mu(A) = 0$ , il vient

$$\int_A f \, d\mu = 0 \text{ (cf. Chapitres 3 ou 4) .}$$

D'où, par la relation de Chasles (cf. Chapitre 4),  $f$  étant mesurable,

$$\int_{A^c} f \, d\mu = \int_{A^c} f \, d\mu + \int_A f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

On montre de même que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{A^c} f_n \, d\mu = \int_E f_n \, d\mu$ , ce qui conduit au résultat. ■

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

5.1.1. Espace mesuré complet

5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

5.2.1. Intégrale sur un segment

5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

5.3.1. Continuité

5.3.2. Dérivabilité

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu$$

### Théorème 5.1.6 – Convergence dominée

Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ . On suppose que :

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$  intégrable sur  $E$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$   $\mu$ -p.p. ;
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ ,  $f$  **mesurable** ;

Alors, on a

- i)  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ , i.e.  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,
- ii)  $\lim_n \int_E |f_n - f| d\mu = \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$ ,
- iii)  $\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$ .

**Remarque 5.1.6.** Si l'espace mesuré est complet alors l'hypothèse  $f$  mesurable est inutile. Si l'espace n'est pas complet et  $f$  non mesurable alors le résultat reste vrai si l'on remplace  $f$  par une fonction  $g$  mesurable t.q.  $f = g$   $\mu$ -p.p. (qui existe cf. Proposition 5.1.3).

► *Idee* : Appliquer le lemme de Fatou sur la partie de  $E$  sur laquelle les deux hypothèses sont valides. Le complémentaire de celle-ci est alors de mesure nulle, et les intégrales de  $f$  et des  $f_n$  sur ce dernier sont nulles.

► (Preuve du théorème de convergence dominée).

Par hypothèses, on a

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$  intégrable sur  $E$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$   $\mu$ -p.p. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A_n) = 0 \text{ et } \forall x \in A_n^c, |f_n(x)| \leq g(x),$$

- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f : \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(x).$

On a

$$\begin{aligned} \mu(A \cup (\cup_n A_n)) &\leq \mu(A) + \sum_n \mu(A_n) \text{ (par sous } \sigma\text{-additivité)} \\ &\leq 0 \quad (\mu(A) = \mu(A_n) = 0) \end{aligned}$$

D'où  $\mu(A \cup (\cup_n A_n)) = 0$  et donc  $A \cup (\cup_n A_n)$  est négligeable.

Posons  $B := A \cup (\cup_n A_n)$  pour alléger les notations.



Si de plus  $\mu(B^c) = 0$ , alors

$$\mu(E) = \mu(B) + \mu(B^c) = 0.$$

Auquel cas, toute intégrale sur  $E$  est nulle, ce qui démontre le théorème. Pour la suite, on suppose  $\mu(E) > 0$ , ce qui implique que  $\mu(B^c) > 0$ .

i) Montrons que  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ .

On a

$$\forall x \in B^c, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

A la limite, il vient

$$\forall x \in B^c, \quad |f(x)| \leq g(x).$$

Comme  $B$  est négligeable, il vient que  $|f| \leq g$   $\mu$ -p.p.

Or,  $f$  mesurable et  $g$  est intégrable, d'où  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ .<sup>3</sup>

---

3. Utiliser l'indicatrice sur  $B^c$  avec le théorème de comparaison et l'égalité de l'intégrale pour deux fonctions égales presque partout, cf. Chapitres 3 et 4.

ii) Montrons que  $\lim_n \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$ .

On a  $\forall x \in B^c, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2g(x)$ .

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, h_n := (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{B^c}$ . On montre que  $(h_n)$  est une suite dans  $\mathcal{M}_+$ .

De plus, elle converge simplement vers  $2g\mathbb{1}_{B^c}$  et on a ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} h_n = 2g\mathbb{1}_{B^c}.$$

D'après le lemme de Fatou,

$$\int_E 2g\mathbb{1}_{B^c} \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{B^c} \, d\mu.$$

Or  $\mu(B) = 0$ , d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_B (2g - |f - f_n|) \, d\mu = 0 = \int_B 2g \, d\mu.$$

D'où,

$$\int_E 2g \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|) \, d\mu.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$2 \int_E g \, d\mu \leq 2 \int_E g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu,$$

$$\text{et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq 0.$$

$$\text{Finalement, } 0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq 0,$$

$$\Rightarrow \lim_n \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

iii) Montrons que  $\lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$ .

On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  intégrable (car  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -p.p. avec  $g$  intégrable).

De même, d'après i),  $f$  est intégrable.

D'où,

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_E (f_n - f) \, d\mu \right| \\ &\leq \int_E |f_n - f| \, d\mu \\ &\rightarrow 0 \text{ par ii) .} \end{aligned}$$



**Exemple 5.1.2** (Convergence dominée).

Soit l'espace mesuré  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ . Soient les fonctions (pour  $n \geq 1$ )

$$\begin{aligned} f_n &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto 1 - x^{1/n} \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  et  $f_n(0) = 1$  pour tout  $n \geq 1$ . Or  $\lambda(\{0\}) = 0$ , d'où  $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$  (sur  $[0, 1]$ ) avec  $f$  la fonction nulle.

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $|f_n| \leq 1$  qui est une fonction intégrable sur  $[0, 1]$ . En effet

$$\int_{[0,1]} 1 \, d\lambda = \lambda([0, 1]) = 1 < \infty .$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda \rightarrow 0 .$$

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

#### 5.1.1. Espace mesuré complet

#### 5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

#### 5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

#### 5.2.1. Intégrale sur un segment

#### 5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

#### 5.3.1. Continuité

#### 5.3.2. Dérivabilité

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

**Théorème 5.2.1 – Intégrale de Riemann sur un segment**

Soit  $f$  mesurable sur  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ ,  $-\infty < a \leq b < +\infty$ , et admettant une intégrale de Riemann sur  $[a, b]$ .

Alors  $f$  admet également une intégrale de Lebesgue sur  $[a, b]$  et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f \, d\lambda$$

**Remarque 5.2.1.** En pratique, on pourra chercher à calculer des intégrales de Lebesgue en se ramenant à des segments sur lesquels les intégrales de Riemann et Lebesgue coïncident (cf TD).

► *Idée :*

On construit l'intégrale de Riemann depuis des fonctions en escalier, qui sont également des fonctions étagées, fonctions sur lesquelles on a construit l'intégrale de Lebesgue. On va ainsi revenir à des fonctions en escalier associées à l'intégrale de Riemann de  $f$ , les intégrer au sens de Lebesgue, et passer à la limite.

► (*Preuve du théorème sur l'intégrale de Riemann sur un segment*).

On définit la subdivision régulière

$$x(n, k) = a + (b - a)2^{-n}k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k = 0, \dots, 2^n.$$

On définit également

$$\forall k > 1, \quad I(n, k) = ]x(n, k-1), x(n, k)] \quad \text{et} \quad I(n, 1) = [x(n, 0), x(n, 1)].$$

On pose

$$u(n, k) = \inf_{x \in [x(n, k-1), x(n, k)]} f(x) \quad \text{et} \quad v(n, k) = \sup_{x \in [x(n, k-1), x(n, k)]} f(x).$$

Enfin on définit (somme de Darboux)

$$g_n = \sum_{k=0}^{2^n} u(n, k) \mathbb{1}_{I(n, k)} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{k=0}^{2^n} v(n, k) \mathbb{1}_{I(n, k)}.$$



On a alors

- $(g_n)$  suite croissante de fonctions mesurables qui converge vers  $g$ ,  $(h_n)$  suite décroissante de fonctions mesurables qui converge vers  $h$ ,
- puisque  $f$  est Riemann intégrable,  $f$  est bornée. Dans ce cas,  $g_n$  et  $h_n$ , qui sont de signe quelconque, sont majorées en valeur absolue par la fonction constante égale à  $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$  qui est Lebesgue intégrable sur  $[a, b]$ . D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{[a,b]} g_n \, d\lambda \rightarrow \int_{[a,b]} g \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} h_n \, d\lambda \rightarrow \int_{[a,b]} h \, d\lambda,$$

- les fonctions  $h_n$  et  $g_n$  sont à la fois étagées et en escalier. Leurs intégrales de Riemann et de Lebesgue sont les mêmes. Il vient

$$\int_a^b g_n(x) dx \rightarrow \int_{[a,b]} g \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_a^b h_n(x) dx \rightarrow \int_{[a,b]} h \, d\lambda,$$

- puisque  $f$  est Riemann intégrable (caractérisation par les sommes de Darboux) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

On a donc  $g \leq f \leq h$ , avec  $g$  et  $h$  mesurables, intégrables, et  $\int (h - g) d\lambda = 0$ .

Finalement, il vient

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \int_{[a,b]} h d\lambda = \int_a^b f(x) dx,$$

et

$$\int_{[a,b]} (h - g) d\lambda = 0.$$

Finalement,  $f$  est intégrable, car majorée en valeur absolue (par la constante  $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$  sur l'intervalle fermé borné  $[a, b]$ ), on a que

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} g d\lambda + \int_{[a,b]} (f - g) d\lambda.$$

Or

$$0 \leq \int_{[a,b]} (f - g) d\lambda \leq \int_{[a,b]} (h - g) d\lambda = 0,$$

d'où

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} g d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$



## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

#### 5.1.1. Espace mesuré complet

#### 5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

#### 5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

#### 5.2.1. Intégrale sur un segment

#### 5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

#### 5.3.1. Continuité

#### 5.3.2. Dérivabilité

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

**Théorème 5.2.2 – Intégrale de Riemann impropre**

Soient  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a < b$  et  $f$  mesurable sur  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ .

On suppose que  $f$  possède une intégrale de Riemann impropre<sup>3</sup> sur  $[a, b[$  *absolument convergente*, c-a-d que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t |f(x)| dx < +\infty.$$

La fonction  $f$  est alors intégrable au sens de Lebesgue et on a l'égalité

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

► *Idée* : Soit  $(b_n)$  une suite croissante de  $\mathbb{R}$  qui tend vers  $b$ . On se ramène à des intégrales sur des segments via la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par  $f_n = f \mathbb{1}_{[a, b_n]}$ .

3. Par définition,  $f$  est Riemann-intégrable sur tout segment de la forme  $[a, t]$ , avec  $t < b$ .

► (Preuve du théorème sur l'intégrale de Riemann impropre).

Soit  $(b_n)$  une suite croissante de  $\mathbb{R}$  qui tend vers  $b$  et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, a < b_n$ .

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = f \mathbb{1}_{[a, b_n]}.$$

1. On suppose  $f$  positive sur  $[a, b]$ . Montrons que  $\int_{[a, b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) dx$ .

Alors  $(f_n)$  est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge  $\mu$ -p.p vers  $f \mathbb{1}_{[a, b]}$ . D'après le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[a, b]} \, d\lambda \\ &= \int_{[a, b]} f \, d\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{[a, b_n]} f \, d\lambda.$$

De plus,  $\int_a^b f(x)dx$  est convergente par hypothèse. Comme  $f$  est positive sur  $[a, b]$ , il vient

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_a^{b_n} f(x)dx \right| &= \int_a^{b_n} f(x)dx \\ &\leq \int_a^b f(x)dx < +\infty\end{aligned}$$

car  $f$  est positive et par définition de la suite  $(b_n)$ .  $f$  est ainsi Riemann-intégrable sur  $[a, b_n]$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . Elle est, de plus, mesurable par hypothèse. D'après le théorème précédent,  $f$  est Lebesgue-intégrable sur  $[a, b_n]$  et on a

$$\int_{[a, b_n]} f \, d\lambda = \int_a^{b_n} f(x)dx.$$

D'où,

$$\int_{[a, b]} f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{b_n} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

2. On suppose que  $f$  n'est pas de signe constant et que  $\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$ .

Alors  $(|f_n|)$  est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge  $\mu$ -p.p vers  $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$ . D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda = \int_{[a,b]} |f| d\lambda.$$

De plus  $\int_a^b |f(x)| dx$  est absolument convergente, donc  $|f|$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b_n]$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} \int_a^{b_n} |f(x)| dx &= \int_{[a,b_n]} |f| d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda. \end{aligned}$$

Il vient

$$\int_{[a,b]} |f| d\lambda = \int_a^b |f(x)| dx < +\infty.$$

D'où  $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$  est Lebesgue-intégrable. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |f|\mathbb{1}_{[a,b]}.$$

D'après le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_{[a,b]} \, d\lambda \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b_n]} f \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b_n]$ <sup>4</sup>. D'après le théorème précédent,

$$\int_a^{b_n} f(x) dx = \int_{[a,b_n]} f \, d\lambda.$$

Finalement,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$



---

4. car  $|f|$  l'est.



**Exemple 5.2.1** (Intégrale impropre).

Soit l'espace mesuré  $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ . Soit la fonction

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto e^{-x} \end{array}$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , elle est donc mesurable. Soit  $t > 0$ , on a,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x) dx &= -[e^{-x}]_0^t \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (f \text{ positive}).$$

Finalement,  $f$  est Lebesgue-intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda = \int_0^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

**Remarque 5.2.2.** Par simplicité, on a supposé, dans les deux théorèmes faisant le lien entre les intégrales de Riemann et Lebesgue (sur un segment et intégrale de Riemann impropre), que la fonction  $f$  **est mesurable**. Cette hypothèse est souvent **vérifiée en pratique** ( $f$  continue, continue par morceaux, etc.).

Néanmoins, ces théorèmes restent valides, même sans cette hypothèse, dès lors que l'on se place sur la **tribu complétée** de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  et que l'on intègre vis-à-vis de la **mesure complétée** de  $\lambda$ .

Sinon, sur la tribu des boréliens  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , si on ne suppose pas la mesurabilité de la fonction  $f$  alors nous avons la variante ci-après sur le lien Riemann-Lebesgue.

### Théorème 5.2.3 – Variante

Soit  $f$  intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ ,  $-\infty < a \leq b < +\infty$ .

Alors  $\exists g \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$  telle que

- i)  $f = g$   $\mu$ -p.p.,
- ii)  $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} g d\lambda$ .

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

#### 5.1.1. Espace mesuré complet

#### 5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

#### 5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

#### 5.2.1. Intégrale sur un segment

#### 5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

#### 5.3.1. Continuité

#### 5.3.2. Dérivabilité

$$F(u) = \int_E f(u, x) \, d\mu(x)$$

### Théorème 5.3.1 – Continuité sous l'intégrale

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soit  $f : \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{I}$  intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , telle que

- i)  $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (mesurable),
- ii)  $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$  tel que pour presque tout  $x$ ,  $u \mapsto f(u, x)$  est continue en  $u_\infty$ ,
- iii)  $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  positive et intégrable telle que pour presque tout  $x$ ,  $\forall u \in \mathcal{I}, |f(u, x)| \leq g(x)$ .

Alors la fonction  $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$  est définie en tout point  $u \in \mathcal{I}$  et est continue en  $u_\infty$ .

► *Idée :*

Prendre une suite qui converge vers  $u_\infty$  (hypothèse ii)) et appliquer le théorème de convergence dominée (hypothèses i) et iii)).

► (*Preuve du théorème de continuité sous l'intégrale*).

1. Montrons que  $F$  est bien définie sur  $\mathcal{I}$ .

Soit  $u \in \mathcal{I}$ . On pose  $\forall x \in E, f_u(x) = f(u, x)$ . Alors,  $f_u$  est mesurable par i). De plus,  $|f_u| \leq g$   $\mu$ -p.p., avec  $g$  intégrable par iii). Donc  $f_u$  est intégrable et  $F$  est bien définie sur  $\mathcal{I}$ .

2. Montrons que  $F$  est continue en  $u_\infty$ .

Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathcal{I}$  qui converge vers  $u_\infty$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, f_n(x) = f(u_n, x).$$

La suite  $(f_n)$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  par i),
- $\exists g \in \mathcal{M}_+$  intégrable sur  $E$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$   $\mu$ -p.p. par iii) ;
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f_{u_\infty}$  : d'après ii),  $\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0$  et  $\forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(u_\infty, x)$ .

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f_{u_\infty} d\mu \Leftrightarrow \lim_n F(u_n) = F(u_\infty).$$



### Corollaire 5.3.2 – Continuité "globale" sous l'intégrale

Soit  $f : \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{I}$  intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , telle que

- i)  $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (mesurable),
- ii) pour presque tout  $x$ ,  $u \mapsto f(u, x)$  est continue sur  $\mathcal{I}$ ,
- iii)  $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  positive et intégrable telle que pour presque tout  $x$ ,  $\forall u \in \mathcal{I}, |f(u, x)| \leq g(x)$ .

Alors la fonction  $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$  est définie et continue sur  $\mathcal{I}$ .

**Exemple 5.3.1** (Convolution). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et continue. La convolée de  $f$  et  $\phi$  est définie par

$$u \mapsto (f \star \phi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u - x) f(x) d\lambda(x).$$

Pour tout  $x$ ,  $u \mapsto \phi(u - x)f(x)$  est continue. Pour tout  $u$ ,  $|\phi(u - x)f(x)| \leq \|\phi\|_{\infty}|f(x)|$  et  $\int_{\mathbb{R}} \|\phi\|_{\infty}|f(x)| d\lambda(x) < \infty$  par hypothèse. Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \phi(u - x)f(x)$  est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Donc par le théorème de continuité globale,  $f \star \phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

### 5.1. Théorèmes de convergence

#### 5.1.1. Espace mesuré complet

#### 5.1.2. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

#### 5.1.3. Convergence dominée

### 5.2. Liens avec l'intégrale de Riemann

#### 5.2.1. Intégrale sur un segment

#### 5.2.2. Intégrale impropre

### 5.3. Intégrale à paramètre

#### 5.3.1. Continuité

#### 5.3.2. Dérivabilité

$$F(u) = \int_E f(u, x) \, d\mu(x)$$

**Théorème 5.3.3 – Dérivation sous l'intégrale**

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Soit  $f : \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{I}$  intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , telle que

- i)  $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (mesurable),
- ii)  $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x)$  est intégrable,
- iii)  $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$  tel que pour presque tout  $x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$  existe,
- iv)  $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  positive et intégrable telle que pour presque tout  $x$ ,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad |f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|.$$

Alors la fonction  $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$  est définie en tout point  $u \in \mathcal{I}$  et est dérivable en  $u_\infty$ . De plus,

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) d\mu(x).$$

► *Idée : idem continuité.*



► (*Preuve du théorème de dérivation sous l'intégrale*).

- Les hypothèses i) et ii) assurent que  $F$  est bien définie sur  $\mathcal{I}$ .
- Montrons que  $F$  est dérivable en  $u_\infty$ .

Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathcal{I}$  qui converge vers  $u_\infty$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq u_\infty$ .

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \phi_n(x) = \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty}.$$

D'après iv),  $|\phi_n| \leq g$   $\mu$ -p.p., avec  $g$  intégrable, et d'après iii),  $\phi_n \xrightarrow{\text{p.p.}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, \cdot)$  :

$$\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, \phi_n(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x).$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E \phi_n \, d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, d\mu(x).$$

$$\text{Soit } \lim_n \frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, d\mu(x)$$



### Corollaire 5.3.4 – Dérivation "globale" sous l'intégrale

Soit  $f : \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{I}$  intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , telle que

- i)  $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (mesurable),
- ii)  $\exists u_0 \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u_0, x)$  est intégrable,
- iii) pour presque tout  $x$ ,  $u \mapsto f(u, x)$  est dérivable sur  $\mathcal{I}$ ,
- iv)  $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  positive et intégrable telle que pour presque tout  $x$ ,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x).$$

Alors la fonction  $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$  est définie et dérivable sur  $\mathcal{I}$ . De plus,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x).$$

► *Idée* : Exploiter l'inégalité des accroissements finies, là où les hypothèses le permettent (à savoir  $\mu$ -p.p.).

► (*Preuve du corollaire de dérivation "globale"*).

1. Montrons que  $F$  est définie sur  $\mathcal{I}$ .

D'après ii),  $\exists u_0 \in \mathcal{I}$  tel que  $x \mapsto f(u_0, x)$  est intégrable.

Soit  $u \in \mathcal{I}$ . On a

$$\forall x \in E, \quad |f(u, x)| \leq |f(u_0, x)| + |f(u, x) - f(u_0, x)|.$$

Or, d'après iii), pour presque tout  $x$ ,  $u \mapsto f(u, x)$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]u, u_0[$  et continue sur l'intervalle fermé  $[u, u_0]$ .

De plus, pour presque tout  $x$ ,  $\forall v \in ]u, u_0[, \left| \frac{\partial f}{\partial u}(v, x) \right| \leq g(x)$  d'après iv).

Par inégalité des accroissements finis, pour presque tout  $x$ ,

$$|f(u, x) - f(u_0, x)| \leq g(x)|u - u_0|.$$

D'où  $g$  intégrable  $\Rightarrow x \mapsto f(u, x) - f(u_0, x)$  intégrable.

Finalement,  $x \mapsto f(u, x)$  est intégrable, et ce  $\forall u \in \mathcal{I}$ , donc  $F$  est bien définie sur  $\mathcal{I}$ .

2. Montrons que  $F$  est dérivable sur  $\mathcal{I}$  et que

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \, d\mu(x).$$

Soit  $(u, u_\infty) \in \mathcal{I}^2$ .

On montre de même que, pour presque tout  $x$ ,

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|.$$

De plus, pour presque tout  $x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$  existe, par hypothèse iii).

En appliquant le théorème précédent, il vient que  $F$  est dérivable en  $u_\infty$ , et que

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, d\mu(x),$$

et ce  $\forall u_\infty \in \mathcal{I}$ .

