

Intégration

Chapitre 6 : Intégration sur les produits

Olivier COTS

16 octobre 2023

Le but de ce chapitre 6 est :

- de poser le cadre des intégrales "multiples" depuis la théorie construite dans les chapitres précédents.

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

Chapitre 6 : Intégration sur les produits

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_E f \, d\mu$$

Chapitre 6 : Intégration sur les produits

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

Définition 6.1.1 – Tribu produit

Soient (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables.

On appelle **tribu produit** sur $E_1 \times E_2$, que l'on note $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ avec $\forall i \in \{1, 2\}, A_i \in \mathcal{A}_i$:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

Le couple $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ est appelé **espace mesurable produit**.

Remarque 6.1.1. En général, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ n'est pas une tribu.

Proposition 6.1.2 – Cas borélien

Soient (E_1, \mathcal{O}_1) et (E_2, \mathcal{O}_2) deux espaces topologiques.¹

On a

- i) $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$.
- ii) Si E_1 et E_2 sont à bases dénombrables d'ouverts, alors

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$

► Admis. ■

Corollaire 6.1.3 – Cas particulier $E_i = \mathbb{R}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \geq 2, \quad \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}} =: \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

► Idée : \mathbb{R} est à base dénombrable d'ouverts (admis). ■

1. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient \emptyset et E , et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

Remarque 6.1.2.

- On rappelle que si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique alors par définition

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}).$$

- $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ est une tribu sur $E_1 \times E_2$: c'est la plus petite tribu contenant les ouverts de $E_1 \times E_2$.
- E est à base dénombrable d'ouverts s'il existe une famille dénombrable d'ouverts de E , noté (O_n) , telle que tout ouvert O de E soit une réunion (au plus dénombrable) d'éléments de (O_n) .

Théorème 6.1.4 – Mesure produit

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés.

On suppose que μ_1 et μ_2 sont σ -finies sur (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) respectivement.²

Alors, il **existe une unique mesure** m sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \quad m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

Cette mesure est σ -finie et est appelée **mesure produit**. On la note $\mu_1 \otimes \mu_2 := m$.

► Admis.

Remarque 6.1.3.

- Le théorème précédent est faux lorsque μ_1 ou μ_2 n'est pas σ -finie.
- Cas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$: la mesure $\lambda \otimes \lambda$ mesure les aires, $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \lambda^{\otimes 3}$ les volumes, etc. La mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est aussi la mesure produit $\lambda_1^{\otimes d}$.

2. $\forall i \in \{1, 2\}, \exists (A_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n^i \in \mathcal{A}_i, \mu_i(A_n^i) < +\infty$ et $E_i = \bigcup_n A_n^i$.

Chapitre 6 : Intégration sur les produits

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

Chapitre 6 : Intégration sur les produits

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

Théorème 6.2.1 – Fubini-Tonelli

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés (les mesures sont σ -finies).

Soit $f: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive.

On définit les fonctions ϕ et ψ sur E_1 et E_2 respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x, y) \, d\mu_2(y), \quad \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) \, d\mu_1(x).$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient

$$\int_{E_1} \phi \, d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi \, d\mu_2$$

(et cette quantité $\in [0, +\infty]$).

Remarque 6.2.1. On retient que pour des fonctions mesurables positives, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

Exemple 6.2.1. Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad (\textbf{Fubini-Tonelli}) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \end{aligned}$$

Exemple 6.2.1. Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad (\textbf{Fubini-Tonelli}) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_0^{1-y} e^{-x} \, dx \right) d\lambda(y) \quad (\textbf{Eq. R-L sur un segment}) \end{aligned}$$

Exemple 6.2.1. Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad (\text{Fubini-Tonelli}) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_0^{1-y} e^{-x} \, dx \right) d\lambda(y) \quad (\text{Eq. R-L sur un segment}) \\ &= \int_0^1 e^{-y} (1 - e^{-(1-y)}) \, dy \quad (\text{Eq. R-L sur un segment}) \\ &= \int_0^1 e^{-y} - e^{-1} \, dy = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Théorème 6.2.2 – Fubini (ou Fubini-Lebesgue)

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés (les mesures sont σ -finies).

Soit $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable de **signe quelconque**. On définit les fonctions ϕ et ψ sur E_1 et E_2 respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y), \quad \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x).$$

Si f est $\mu_1 \otimes \mu_2$ -intégrable alors ϕ et ψ sont resp. μ_1 -intégrable et μ_2 -intégrable, et vérifient la double égalité

$$\int_{E_1} \phi d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi d\mu_2.$$

Remarque 6.2.2. Il est possible de vérifier l'intégrabilité de $|f|$ par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$ par le Théorème de Fubini-Tonelli.

Chapitre 6 : Intégration sur les produits

6.1. Tribu et mesure produits

6.2. Théorèmes de Fubini

6.3. Changement de variables

$$\int_E f \, d\mu$$

Définition 6.3.1 – \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^d . Un **\mathcal{C}^1 -difféomorphisme** ϕ de U dans V est une bijection $\phi (U \rightarrow V)$ qui est \mathcal{C}^1 et telle que ϕ^{-1} est également \mathcal{C}^1 .

Définition 6.3.2 – Matrice Jacobienne

Si ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U dans V (deux ouverts de \mathbb{R}^d), on appelle **matrice jacobienne** en $u := (u_1, \dots, u_d)$, la matrice

$$J_{\phi}(u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_d}(u) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_d}(u) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_d}(u) \end{bmatrix}.$$

Théorème 6.3.3 – Inversion globale (cadre \mathbb{R}^d)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^d et $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Alors ϕ réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur $V = \phi(U)$ si et seulement si ϕ satisfait les trois conditions suivantes :

- i) ϕ est \mathcal{C}^1 sur U ,
- ii) ϕ est injective,
- iii) $\forall u \in U, \det(J_\phi(u)) \neq 0$.

Remarque 6.3.1. En pratique, on est souvent confrontés aux cas suivants :

- On sait que ϕ est une bijection de U sur V et on connaît U, V (ouverts) et ϕ^{-1} . Il suffit alors de vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont \mathcal{C}^1 .
- On ne sait pas inverser ϕ . On applique alors le théorème d'inversion globale. La difficulté réside souvent dans la détermination de $V = \phi(U)$.

Théorème 6.3.4 – Changement de variables

Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^d .

Soient $\phi: U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne sur V et intégrable.

Alors la fonction $f \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \, d\lambda.$$

Remarque 6.3.2.

- Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans les calculs.
- On a encore

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \, d\lambda.$$

si $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne sur V et positive (avec $\phi: U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme).

Remarque 6.3.3 (Dimension 1 : lien avec le changement de variables (Riemann)). Soient $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles ouverts de \mathbb{R} .

Soit $\phi:]a, b[\rightarrow]c, d[$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On a que ϕ' ne peut s'annuler sur $]a, b[$ et est de signe constant.

Supposons $\phi' > 0$. Alors la formule du changement de variable pour les intégrales de Riemann donne

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b (f \circ \phi)(y)\phi'(y)dy = \int_a^b (f \circ \phi)(y)|\phi'(y)|dy.$$

Si $\phi' < 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)dx &= \int_b^a (f \circ \phi)(y)\phi'(y)dy \\ &= - \int_a^b (f \circ \phi)(y)\phi'(y)dy \\ &= \int_a^b (f \circ \phi)(y)|\phi'(y)|dy.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule du changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue.

Exemple 6.3.1 (Coordonnées polaires).

Soit

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (\rho, \theta) &\longmapsto \phi(\rho, \theta) := (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))\end{aligned}$$

L'application ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme (admis), de matrice Jacobienne

$$\forall (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[, \quad J_\phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$|\det J_\phi(\rho, \theta)| = |\rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta)| = |\rho|.$$

Soit

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow e^{-(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

f est mesurable (car continue) et positive.

Exemple 6.3.1 (Coordonnées polaires).

D'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{[0, +\infty]} \int_{[0, +\infty]} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0, +\infty]} e^{-x^2} \left(\int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \left(\int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) \times \int_{[0, +\infty]} e^{-x^2} d\lambda(x) \\ &= \left(\int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right)^2.\end{aligned}$$

Exemple 6.3.1 (Coordonnées polaires).

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\ &= \int_{]0, +\infty[\times]0, \pi/2[} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta) \\ &= \int_{[0, +\infty] \times [0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta). \end{aligned}$$

Exemple 6.3.1 (Coordonnées polaires).

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\
 &= \int_{]0, +\infty[\times]0, \pi/2[} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta) \\
 &= \int_{[0, +\infty] \times [0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta).
 \end{aligned}$$

Par Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{[0, +\infty]} \left(\int_{[0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d\lambda(\theta) \right) d\lambda(\rho). \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} d\lambda(\rho)
 \end{aligned}$$

Exemple 6.3.1 (Coordonnées polaires).

Or, l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$ est convergente (et vaut $1/2$), avec $\rho \rightarrow \rho e^{-\rho^2}$ mesurable positive sur \mathbb{R}_+ .

Il vient que $\rho \rightarrow \rho e^{-\rho^2}$ est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}_+ et on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} d\lambda(\rho) = \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

soit

$$\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exemple 6.3.2 (Convolution).

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et intégrables. Rappelons que la convolée de f et g est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda(y).$$

Montrons que cette fonction est bien définie (c'est à dire que $f \star g < \infty$ p.p.).

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ (\text{par Fubini-Tonelli}) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Exemple 6.3.2 (Convolution).

Pour y fixé, soit le changement de variable en dimension 1 ($u = x - y$, $x = u + y$) :

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \rightarrow & u + y \end{array}$$

ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $\forall u \in \mathbb{R}, |\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$.

Il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x - y)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(u)| d\lambda(u).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| d\lambda(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| d\lambda(u) \right) d\lambda(y) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| d\lambda(u) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| d\lambda(y) \right) \\ (f \text{ et } g \text{ intégrables}) &< +\infty. \end{aligned}$$

Il vient $|f \star g|$ est finie μ -p.p., et donc $f \star g$ est finie μ -p.p.

Exemple 6.3.2 (Convolution).

Fixons x et opérons un changement de variable $y = x - u$ dans l'intégrale :

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & u \rightarrow x - u \end{array}$$

ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $\forall u \in \mathbb{R}, |\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) \, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u) \, d\lambda(u)$$

Finalement,

$$f \star g = g \star f .$$