

# Analyse–Mise à niveau

## Département Sciences du numérique

Informatique, Mathématiques Appliquées, Réseaux, Télécommunications

### Analyse



J. Gergaud

31 août 2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Vocabulaire de la théorie des ensembles</b>	<b>3</b>
I	propositions, ensembles et prédicats . . . . .	3
I.1	Introduction . . . . .	3
I.2	Logique des propositions et Logique des Prédicats . . . . .	3
I.3	Raisonnements . . . . .	4
II	Théorie des ensembles . . . . .	5
II.1	Définitions–Notations . . . . .	5
II.2	Cardinaux . . . . .	6
II.3	Opération sur les ensembles . . . . .	7
III	Fonction, application . . . . .	8
III.1	Introduction . . . . .	8
III.2	Définitions . . . . .	8
IV	Indices, familles . . . . .	12
IV.1	Indices et sommation . . . . .	12
IV.2	Définitions . . . . .	14
IV.3	Produits . . . . .	15
V	Relation d'équivalence . . . . .	15
V.1	Définitions . . . . .	15
VI	Relation d'ordre . . . . .	17
VII	Équation . . . . .	18
VIII	Exercices . . . . .	20
VIII.1	Exercices avec solutions . . . . .	20
VIII.2	Exercices avec indication . . . . .	22
VIII.3	Devoir . . . . .	23

# Introduction

Ce cours est très largement inspiré de l'ouvrage [\[1\]](#).



# Chapitre 1

## Vocabulaire de la théorie des ensembles

### I propositions, ensembles et prédicats

#### I.1 Introduction

Vous avez sans doute déjà rencontré des affirmations du type

- (i) "7 est un entier pair" ;
- (ii) " $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}$ " ;
- (iii) "toute fonction dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  est continue" ;
- (iv) "on a  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ " ;
- (v) "on a  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ " ;
- (vi) "le nombre  $x$  est un carré" ;
- (vii) "un triangle est rectangle si et seulement si le carré d'un de ses côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés".

Parmi ces affirmations, vous savez, ou vous pouvez justifier :

- que certaines, comme (ii), (iii) et (vii) sont vraies ;
- que d'autres, comme (i) sont fausses ;

Mais d'autres dépendent de variables plus ou moins explicitées ; elles peuvent être vraies dans certains cas et fausses dans d'autres :

- l'affirmation (iv) est vraie pour quelques valeurs de  $a$  et  $b$ , mais fausse dans une grande majorité de cas ;
- l'affirmation (v) est vraie si  $a$  et  $b$  sont réels, mais fausse si  $a$  et  $b$  sont des matrices  $(2, 2)$  ;
- l'affirmation (vi) dépend évidemment de la valeur de  $x$ , mais elle dépend aussi de la nature des valeurs que peut prendre cette variable  $x$  :
  - Si  $x$  est dans  $\mathbf{N}$  c'est-à-dire si  $x$  est un entier naturel, cette affirmation n'est vraie que pour certaines valeurs de  $x$  ;
  - Si  $x$  est dans  $\mathbf{R}$ , l'ensemble des réels, cette affirmation n'est vraie que lorsque  $x$  est positif ou nul ;
  - Si  $x$  est dans  $\mathbf{C}$ , l'ensemble des complexes, cette affirmation est toujours vraie.

#### I.2 Logique des propositions et Logique des Prédicats

##### Formules : vue intuitive

Pour une définition formelle des formules de la logique des propositions et de la logique des prédicats, voir le cours de 1<sup>re</sup> année.

**Exemple I.1.** (i) "2 est un entier pair" est une formule vraie de la logique des propositions ;

(ii) " $(1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ " est une formule vraie de la logique des propositions ;

(iii) " $1 = 2 +$ " n'est pas une formule de la logique des propositions.

(iv) " $x^2 - 1 = 0$ " est une formule de la logique des prédicats ; Cette formule est vraie si on donne la valeur 1 ou -1 à  $x$ , elle est fausse dans les autres cas.

**Remarque I.2.** Si  $P$  est une formule :

- on écrit la plupart du temps "on a  $P$ " ou "donc  $P$ ", au lieu de " $P$  est vraie" ou "donc  $P$  est vraie" ;
- de même on écrit "supposons  $P$ " au lieu de "supposons  $P$  vraie".

Nous rappelons la définition intuitive des quantificateurs "quel que soit" ( $\forall$ ) et "il existe" ( $\exists$ ). La formule

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

signifie que  $P(x)$  est vraie pour tout  $x$  élément de  $E$  et se lit : quel que soit (ou pour tout  $x$ )  $x$  appartenant à l'ensemble  $E$   $P(x)$  est vraie. Tandis que l'expression

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

signifie que  $P(x)$  est vraie pour au moins un  $x$  élément de  $E$  et se lit : il existe  $x$  appartenant à l'ensemble  $E$  tel que  $P(x)$  soit vraie.

### Connecteurs non, et, ou, implique, équivalent

Dans la vie courante le mot ou peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :

- ou exclusif comme dans "fromage ou dessert" ;
- ou mathématique comme dans "s'il pleut ou s'il fait du vent, je ne sors pas" ;
- ou conditionnel comme dans "mange ta soupe ou tu iras au lit".

En mathématique ces mots ont un sens précis, ils sont définis par leurs tables de vérité (voir le cours de 1<sup>re</sup> année).

### Quelques propriétés usuelles sur les connecteurs

**Propriété I.3.** Si  $P$  et  $Q$  sont deux propositions alors

- (i)  $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$  ;
- (ii)  $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$  ;
- (iii)  $P \iff Q$  si et seulement si  $(P \implies Q \text{ et } Q \implies P)$  ;
- (iv) Si  $(P \implies Q \text{ et } Q \implies R)$  alors  $P \implies R$  ;
- (v)  $(P \implies Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } Q)$  ;
- (vi)  $(P \implies Q) \iff (\text{non } Q \implies \text{non } P)$  (propriété de la contraposée) ;
- (vii)  $\text{non} ( \text{"}\forall x \in E \text{ } P(x)\text{"} )$  est identique à  $\text{"}\exists x \in E \text{ non } P(x)\text{"}$  ;
- (viii)  $\text{non} ( \text{"}\exists x \in E \text{ } P(x)\text{"} )$  est identique à  $\text{"}\forall x \in E \text{ non } P(x)\text{"}$ .

### Remarques sur la Négation et les quantificateurs

**Exemple I.4.** (i) La proposition " $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 = 0$ " peut se traduire en français par la phrase : "pour tout réel  $x$ , on a  $x^2 - 1 = 0$ ". Elle est évidemment fausse. Sa négation est "on peut trouver un réel  $x$  tel que  $x^2 - 1 \neq 0$ ", qui est donc vraie et qui s'écrit mathématiquement " $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \neq 0$ ".

(ii) Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

- Pour écrire que  $f$  est la fonction nulle on écrit : " $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$ " ;
- La négation de la proposition précédente est :  $f$  prend des valeurs non nulles et s'écrit " $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$ " ;
- Attention de ne pas confondre cette proposition avec " $\forall x \in \mathbf{R} f(x) \neq 0$ " qui exprime que  $f$  ne s'annule jamais et dont la négation est " $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$ ".

## I.3 Raisonnements

Soit à démontrer  $Q$ , sachant que l'on a l'hypothèse  $P$ , plusieurs types de démonstrations sont possibles :

### Raisonnement par contraposée

Il suffit de supposer que l'on a  $(\text{non } Q)$  et de démontrer  $(\text{non } P)$ , car

$$(P \implies Q) \iff (\text{non } Q \implies \text{non } P).$$

### Raisonnement par l'absurde

Il suffit de supposer que  $(\text{non } P)$  est vraie et de montrer que l'on aboutit alors à une contradiction.

**Raisonnement par récurrence**

Ce raisonnement ne s'utilise que pour démontrer des propriétés sur  $\mathbf{N}$ . Pour montrer qu'une propriété  $P$  est vraie sur  $\mathbf{N}$ , il suffit :

- (i) de montrer que  $P$  est vraie pour  $n = n_0$ , c'est-à-dire à partir d'un certain rang ;
- (ii) de supposer que  $P$  est vraie pour  $n$  et de montrer que  $P$  est vraie pour  $n + 1$ .

Ainsi, on démontre que la proposition  $P$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

**Exemple 1.5.** *Démontrons la propriété suivante : La somme des  $n$  premiers entiers est*

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

- (i) Montrons que la propriété est vraie pour  $n = 1$ . En effet

$$1 = \frac{1(2)}{2}.$$

- (ii) Supposons que la propriété  $P$  est vraie pour  $n$  et montrons que la propriété  $P$  est vraie pour  $n + 1$ . Si  $P$  est vraie pour  $n$ , cela signifie que

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

et calculons

$$\sum_{k=1}^{n+1} k,$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{par hypothèse de récurrence}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ce qui démontre que la proposition  $P$  pour  $n + 1$ .

**II Théorie des ensembles****II.1 Définitions–Notations**

**Définition II.1** (Ensemble–Élément).

*On appelle ensemble toute collection d'“objets” appelés éléments. Un ensemble ne contient pas de double.*

- (i)  $B = \{1, 4, 1\}$  n'est pas un ensemble
- (ii)  $A = \{1, 4\}$  et  $B = \{4, 1\}$  définissent le même ensemble

On note en général les ensembles par des lettres majuscules et les éléments par des lettres minuscules. Un ensemble peut-être défini de deux manières différentes, soit par le dénombrement de tous ses éléments, soit en décrivant une propriété de tous ses éléments.

**Exemple II.2.** *L'ensemble des voyelles de la langue française peut-être défini par l'énumération de tous ses éléments :  $E = \{a, e, i, o, u, y\}$  ou par l'énoncé d'une propriété :  $E = \{x, x \text{ est une voyelle}\}$  qui se lit “l'ensemble des  $x$  tel que  $x$  est une voyelle”.*

**Notation II.3.** *Si un élément  $a$  appartient à un ensemble  $E$  on écrit :  $a \in E$ , s'il n'appartient pas à l'ensemble  $E$  on a non ( $a \in E$ )” qui se note aussi “ $a \notin E$ ”.*

**Exemple II.4.**  $E = \{x \in \mathbf{R}, 1 \leq x < 2\}$   $E$  est l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 1 et strictement inférieurs à 2. On note aussi dans ce cas  $E = [1; 2[$  et  $E$  s'appelle aussi l'intervalle semi-ouvert à droite 1;2. On a aussi :  $1,02 \in E$  ;  $0,33 \notin E$  ;  $1 \in E$  ;  $2 \notin E$ .

**Remarque II.5.** Dans l'exemple précédent  $\mathbf{R}$  représente l'ensemble des réels, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres :  $1/3 \in \mathbf{R}$ ,  $\pi \in \mathbf{R}$ ,  $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ ,  $-0,5 \in \mathbf{R}$ . On note aussi  $\mathbf{R} = ]-\infty; +\infty[$  : intervalle moins l'infini, plus l'infini.

**Notation II.6.** *Rappelons les notations des ensembles usuels :*

— Ensembles des entiers positifs ou nuls, on dit aussi ensemble des entiers naturels :

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

- Ensemble des entiers strictement positifs :  $\mathbf{N}^*$ . L'étoile indique que l'on a enlevé le zéro de l'ensemble.
- Ensemble des entiers positifs, négatifs ou nul. On dit aussi ensemble des entiers relatifs :  $\mathbf{Z}$ .
- Ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{\text{nombre } x, x = a/b, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}^*\}.$$

**Définition II.7** (Sous-ensemble).

On dit qu'un ensemble  $A$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $B$ , ou est inclus dans  $B$ , si et seulement si tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  :

$$A \subset B \iff \forall a \in A \quad a \in B.$$

**Définition II.8** (Ensemble égaux).

Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont égaux si et seulement si tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  et réciproquement.

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

**Exemple II.9.** (i)  $A = \{1, 4\}$  et  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A \subset B$  mais  $B \not\subset A$

(ii)  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

**Définition II.10** (Ensemble vide). On appelle ensemble vide et on note  $\emptyset$  (ou plus rarement  $\{\}$ ) l'ensemble qui ne contient aucun élément.

**Remarque II.11.** On a toujours  $\emptyset \subset E$ .

**Définition II.12** (Ensemble des parties d'un ensemble). Soit  $E$  un ensemble. On appelle ensemble des parties de  $E$  et on note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$ .

**Exemple II.13.** (i) Soit  $E = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

(ii) Soit  $E = \emptyset$ ,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}.$$

Attention  $\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$ . En effet  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$  est l'ensemble qui contient 1 élément : l'ensemble vide.

**Définition II.14** (Ensemble produit). Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle ensemble produit de  $E$  et de  $F$  et on note  $E \times F$  (on lit  $E$  croix  $F$ ) l'ensemble de tous les couples  $(x, y)$  où  $x$  est un élément de  $E$  et  $y$  est un élément de  $F$ .

**Exemple II.15.**  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{1, 2, 3\}$

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

**Remarque II.16.** (i) Si  $E$  ou  $F$  est vide alors  $E \times F$  est vide ;

(ii) Si  $x \neq y$ , alors  $(x, y) \neq (y, x)$ .

## II.2 Cardinaux

**Définition II.17** (Cardinal d'un ensemble). On appelle cardinal d'un ensemble le “nombre” d'éléments de cet ensemble. Un ensemble de cardinal 1 s'appelle un singleton, un ensemble de cardinal 2 s'appelle une paire.

**Exemple II.18.** (i)  $A = \{1, 2, 7\}$  ;  $\text{Card}(A) = 3$ .

(ii)  $A = \emptyset$  ;  $\text{Card}(A) = 0$ .

**Remarque II.19.** Un cardinal peut-être fini ou infini. Le cardinal de l'ensemble des entiers naturels est infini.

**Définition II.20** (Ensemble fini-dénombrable-infini non dénombrable).

(i) Un ensemble  $E$  est dit fini si et seulement si son cardinal est fini.

(ii) Un ensemble  $E$  est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection de  $E$  sur  $\mathbf{N}$ , cf la définition (III.11)).



(iii) Un ensemble  $E$  est dit infini s'il n'est pas fini.

**Remarque II.21.** Il est important de bien assimiler la définition ci-dessus car nous en aurons besoin en probabilités et en théorie de l'intégration où nous serons en effet souvent obligés de différencier ces trois cas.

**Exemple II.22.** (i)  $E = \{a, b, c\}$   $E$  est fini

(ii)  $E = \{x \in \mathbf{N}, x \text{ pair}\}$   $E$  est infini dénombrable. En effet

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

est une bijection de  $\mathbf{N}$  sur  $E$  (bien que  $E$  soit inclus strictement dans  $\mathbf{N}$ ).

(iii)  $\mathbf{R}$  est une ensemble infini mais n'est pas dénombrable (admis).

### II.3 Opération sur les ensembles

**Définition II.23** (Union de deux ensembles). On appelle union des deux ensembles  $A$  et  $B$  et on note  $A \cup B$  (on lit  $A$  union  $B$ ) l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  :

$$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

**Exemple II.24.**  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{b, c, d\}$ ,  $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

**Définition II.25** (Intersection de deux ensembles). On appelle intersection des ensembles  $A$  et  $B$  et on note  $A \cap B$  (on lit  $A$  inter  $B$ ) l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  et à  $B$  :

$$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

**Exemple II.26.**  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{b, c, d\}$

$$A \cap B = \{b\}$$

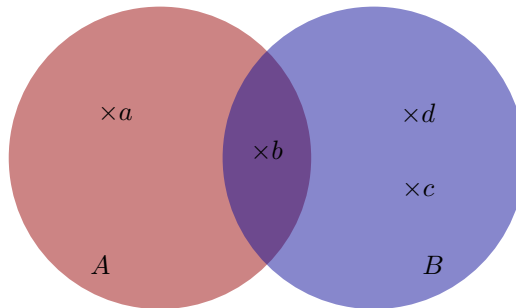


FIGURE 1.1 – Diagramme de Venn.

**Définition II.27** (Ensembles disjoints). Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont dits disjoints si et seulement si ils n'ont aucun éléments en commun :

$$A \text{ et } B \text{ sont disjoints} \iff A \cap B = \emptyset.$$

**Remarque II.28.** On peut avoir des ensembles deux à deux non disjoints qui ont une intersection vide :  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $A_2 = \{2, 3\}$  et  $A_3 = \{1, 3\}$ ,

$$A_1 \cap A_2 = \{2\} \quad A_1 \cap A_3 = \{1\} \quad A_2 \cap A_3 = \{3\},$$

$$\text{mais } A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

**Définition II.29** (Complémentaire d'un ensemble). Si  $A$  est inclus dans  $E$ , on appelle complémentaire de  $A$  dans  $E$ , l'ensemble  $B$  notée  $C_E A$  des éléments de  $E$  qui ne sont pas éléments de  $A$  :

$$B = C_E A = \{x, \text{in } E / x \notin A\}.$$

**Notation II.30.** Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence  $E$ , comme c'est le cas en calcul des probabilités, on note aussi  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

**Propriété II.31.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles quelconques. Alors nous avons les propriétés suivantes :

- (i)  $A \cup B = B \cup A$  commutativité ;
- (ii)  $A \cap B = B \cap A$  commutativité ;
- (iii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  associativité ;
- (iv)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$  associativité ;
- (v)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  distributivité de l'intersection par rapport à la réunion ;
- (vi)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  distributivité de la réunion par rapport à l'intersection ;
- (vii) Si  $A \subset B$  et  $B \subset C$  alors  $A \subset C$  transitivité ;
- (viii) Si  $A \subset B$  et  $A \subset E$  et  $B \subset E$  alors  $C_E B \subset C_E A$  ;
- (ix)  $A \cup \emptyset = A$  ;
- (x)  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ;
- (xi) Si  $A \subset E$  et  $B \subset E$  alors  $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$  première loi de Morgan ;
- (xii) Si  $A \subset E$  et  $B \subset E$  alors  $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$  deuxième loi de Morgan ;
- (xiii) Si  $A \subset E$  alors  $C_E C_E A = A$  ;
- (xiv)  $(A \cap B) \cup (C_{A \cup B} A \cap B) = A \cup B$  et  
 $(A \cap B) \cap (C_{A \cup B} A \cap B) = \emptyset$
- (xv)  $A \cup A = A$  ;
- (xvi)  $A \cap A = A$ .

### III Fonction, application

#### III.1 Introduction

La notion de fonction est une notion importante car elle permet de représenter des objets que nous utilisons tous les jours. Si nous voulons par exemple étudier la taille de la population française nous travaillerons avec la fonction qui à chaque individu fait correspondre un nombre positif qui représentera sa taille en centimètres : la taille est *fonction* de l'individu. Si nous voulons étudier une réaction chimique, nous pouvons être intéressés par exemple par la concentration d'un certain produit "en fonction du temps" : la concentration est *fonction* du temps.

#### III.2 Définitions

**Définition III.1** (Fonction–Application). Une fonction ou application définie sur un ensemble  $E$  et à valeurs dans un ensemble  $F$  est une correspondance entre éléments de  $E$  et de  $F$  qui à tout élément de  $E$  associe un élément de  $F$  et un seul.

**Notation III.2.** Une application de  $E$  dans  $F$  sera notée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x); \end{aligned}$$

- (i)  $E$  s'appelle l'ensemble de départ de la fonction ou application ;
- (ii)  $F$  s'appelle l'ensemble d'arrivée de la fonction ou application ;
- (iii)  $f(x)$  s'appelle l'image de  $x$  par la fonction ou l'application  $f$  ;
- (iv)  $x$  est un antécédent de  $y$  par la fonction ou application  $f$ .

**Remarque III.3.** On fait parfois la distinction entre fonction et application :

- Une fonction associe à chaque élément de l'ensemble de départ  $E$  au plus un élément de l'ensemble d'arrivée  $F$ . On définit alors le domaine de définition de la fonction  $f$  par l'ensemble des éléments de l'espace de départ qui ont une image dans l'ensemble d'arrivée :  $\text{dom } f = \{x, \text{in } E / f(x) \text{ existe}\}$ . Dans ce cas on peut définir l'application

$$\begin{aligned} g : \text{dom } f &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

- Dans ce cours, nous ne ferons pas de différence entre fonction et application.

**Remarque III.4.** (i) Nous distinguerons soigneusement la fonction ou l'application  $f$  et la transformée  $f(x)$  d'un élément  $x$  de  $E$ . Ce transformé est un élément de  $F$ .

(ii) Pour définir la règle qui à  $x$  élément de  $E$  associe  $f(x)$  élément de  $F$  nous utiliserons la notation suivante :  $x \mapsto f(x)$ . Par suite nous définirons complètement une fonction  $f$  par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

**Exemple III.5.**

$$\begin{aligned} f : \{\text{Jean, Paul, Marie}\} &\longrightarrow \{\text{bleu, marron}\} \\ \text{Jean} &\longmapsto \text{bleu} \\ \text{Paul} &\longmapsto \text{marron} \\ \text{Marie} &\longmapsto \text{marron}. \end{aligned}$$

$f$  représente l'application qui à chacun des individus Jean, Paul, Marie associe la couleur de ses yeux. Nous pouvons ici représenter la fonction  $f$  par :

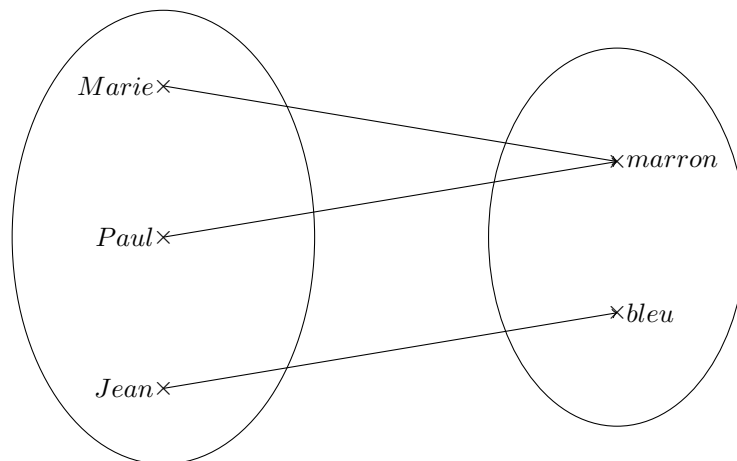


FIGURE 1.2 – Fonction couleur des yeux.

**Exemple III.6.** On désire représenter la relation “est le père de”. Nous pouvons avoir par exemple :

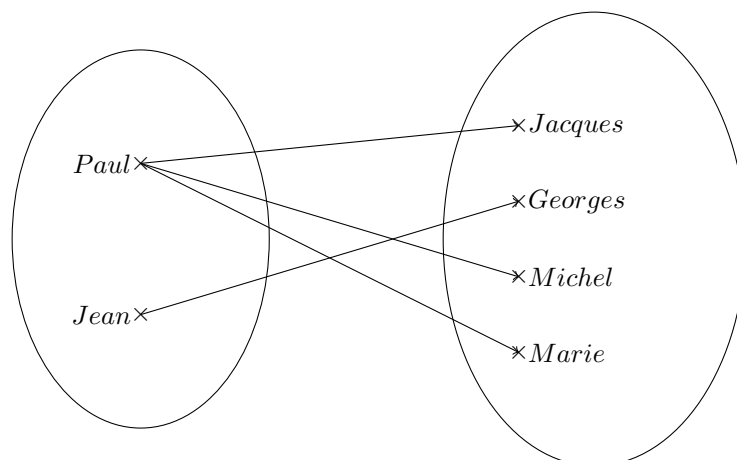


FIGURE 1.3 – correspondance est le père de.

Mais nous ne pouvons pas représenter ceci par une fonction car Paul n'a pas qu'un seul enfant, cf. la figure 1.3.

**Exemple III.7.**

(i)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors :  $f(3) = 3^2 = 3 \times 3 = 9$  et  $f(-5) = (-5)^2 = 25$ .

(ii)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto 2x + 1. \end{aligned}$$

Nous avons alors :  $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$  et  $f(-5) = 2 \times (-5) + 1 = -9$ .

**Définition III.8** (Égalité de deux applications). Deux applications  $f$  et  $g$  sont dites égales si et seulement si

- (i) on a l'égalité des ensembles de départ de  $f$  et  $g$  ;
- (ii) on a l'égalité des ensembles d'arrivée de  $f$  et  $g$  ;
- (iii) pour tout élément  $x$  de l'ensemble de départ commun on a  $f(x) = g(x)$ .

**Notation III.9.** On notera  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

**Définition III.10** (Restriction, prolongement). Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- (i) Si  $A$  est une partie de  $E$ , la restriction de  $f$  à  $A$ , notée  $f|_A$  est l'application de  $A$  dans  $F$  définie par : pour tout  $x \in A$ ,  $f|_A(x) = f(x)$ .
- (ii) On appelle prolongement de  $f$  tout application  $g$  définie sur un ensemble  $A$  contenant  $E$  vérifiant : pour tout  $x \in E$ ,  $g(x) = f(x)$ .

**Définition III.11** (Injection, surjection, bijection). Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- (i)  $f$  est une injection, on dit aussi que  $f$  est injective, si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

- (ii)  $f$  est une surjection, on dit aussi que  $f$  est surjective, si et seulement si

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

- (iii)  $f$  est une bijection, on dit aussi que  $f$  est bijective, si et seulement si  $f$  est injective et  $f$  est surjective.

**Remarque III.12.** (i) Dire que  $f$  est injective signifie que l'image de 2 éléments de l'ensemble de départ  $F$  par  $f$  donne 2 éléments de l'ensemble d'arrivée  $F$  différents.

- (ii) Pour démontrer que  $f$  est injective, on utilise souvent la contraposée  $f$  de la définition, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- (iii) Dire que  $f$  est surjective, c'est dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  possède au moins un antécédent.

- (iv) Dire que  $f$  est une bijection signifie que tout élément de l'ensemble de d'arrivée possède un et un seul antécédent :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

(le caractère ! dans l'expression ci-dessus se lit unique).

**Exemple III.13.**

(i)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{a, b\} \\ 1 &\longmapsto a \\ 2 &\longmapsto b \\ 3 &\longmapsto a \end{aligned}$$

$f$  est une surjection, mais pas une injection ( $a$  possède deux antécédents 1 et 3 :  $f(1) = f(3) = a$ ).

(ii)

$$\begin{aligned}
 f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{a, b, c, d\} \\
 1 &\longmapsto b \\
 2 &\longmapsto c \\
 3 &\longmapsto d
 \end{aligned}$$

$f$  n'est pas une surjection ( $a$  ne possède pas d'antécédent), mais  $f$  est injective.

(iii)

$$\begin{aligned}
 f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{a, b, c\} \\
 1 &\longmapsto b \\
 2 &\longmapsto a \\
 3 &\longmapsto c
 \end{aligned}$$

$f$  est une bijection.

**Définition III.14** (Composée de 2 applications). Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles et  $f$  et  $g$  deux applications respectivement de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $G$ . On appelle composée des applications  $f$  et  $g$  l'application  $h = g \circ f$  définie par

$$\begin{aligned}
 h = g \circ f : E &\longrightarrow F \\
 x &\longmapsto h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).
 \end{aligned}$$

**Exemple III.15.** Soient

$$\begin{aligned}
 f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\
 x &\longmapsto 2x + 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\
 y &\longmapsto g(y) = \sin y
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 g \circ f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\
 x &\longmapsto (g \circ f)(x) = \sin(2x + 3).
 \end{aligned}$$

**Propriété III.16.** Si  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$  sont 3 applications alors  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  que l'on notera aussi  $h \circ g \circ f$ .

**Définition III.17** (Application réciproque). Soit  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$ , on appelle application réciproque l'application notée  $f^{-1}$  définie par :

$$\begin{aligned}
 F &\longrightarrow E \\
 y &\longmapsto f^{-1}(y) = x,
 \end{aligned}$$

**Propriété III.18.** (i) L'application réciproque est une bijection.

(ii)  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

(iii) Si  $f$  est une bijection on a  $f^{-1} \circ f = id_E$  et  $f \circ f^{-1} = id_F$  où  $id_E$  et  $id_F$  sont respectivement les applications identité de  $E$  et  $F$ .

**Définition III.19.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application de  $E$  dans  $F$ .

(i) Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on appelle ensemble image directe de  $A$  (ou image de  $A$ ) l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

(ii) Pour toute partie  $B$  de  $F$ , on appelle ensemble image réciproque de  $B$  l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x, \text{in } E / f(x) \in B\}.$$

**Remarque III.20.** (i)  $f$  est une surjection si et seulement si  $f(E) = F$ .

(ii) Il ne faut pas confondre  $f^{-1}$  introduit ci-dessus avec l'application réciproque d'une bijection. En pratique, c'est le contexte qui donne la signification.

(iii)  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$  si et seulement si  $f$  est une application et  $f^{-1}(\{y\})$  est un singleton pour tout  $y \in F$ .

Les propriétés suivantes ne doivent pas être connues par cœur, mais elles doivent pouvoir être retrouvées rapidement :

**Propriété III.21.** (i)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  ;

(ii)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  ;

(iii)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  ;

(iv)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  ;

(v)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  ;

(vi)  $A \subset f^{-1}(f(A))$  ;

(vii)  $f^{-1}(C_F B) = C_E(f^{-1}(B))$ .

*Démonstration*

Démontrons par exemple (ii). Par définition  $f^{-1}(A \cap B) = \{x \in E, f(x) \in A \cap B\} = \{x \in E, f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B\}$ . D'autre part  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in A\} \cap \{x \in E / f(x) \in B\}$ . D'où le résultat.  $\square$

On peut démontrer d'autres résultats comme

**Théorème III.22.** Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est injective si et seulement si pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

*Démonstration*

(i) Démontrons tout d'abord l'implication  $f$  injective  $\Rightarrow$  pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . On pose  $F' = f(E)$  et  $g$  l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F' \\ x &\longmapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Alors  $f$  est injective si et seulement si  $g$  est une bijection. Posons maintenant  $h = g^{-1}$  alors pour tout  $A$  et  $B$  on a  $h^{-1}(A \cap B) = h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$ . Mais  $h^{-1} = g$  et pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ ,  $f(A) = g(A)$ , d'où le résultat.

(ii) Réciproque. Supposons donc que l'on ait la propriété : pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments distincts de  $E$  et posons  $A = \{x\}$  et  $B = \{y\}$ , alors  $A \cap B = \emptyset$  et donc  $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ . Par suite  $f(A) \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \emptyset$ , donc  $f(x) \neq f(y)$ .

$\square$

## IV Indices, familles

### IV.1 Indices et sommation

Nous utiliserons souvent des notations avec des indices, ceci permet de noter différents éléments d'un même ensemble. Nous noterons par exemple  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  11 nombres réels.

Ces indices permettent aussi d'écrire des sommes et des produits de nombres. On écrira notamment

$$\sum_{k=1}^n x_k$$

pour la somme  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  et

$$\prod_{k=1}^n x_k$$

pour le produit  $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ .

Dans ces notations l'indice  $k$  joue un rôle opératoire. On l'appelle l'indice de sommation.

Lorsque le contexte est suffisamment claire on écrit simplement :

$$\sum_k x_k \text{ et } \prod_k x_k$$

, et même parfois

$$\sum x_k \text{ et } \prod x_k$$

**Remarque IV.1.** Le produit des deux sommes  $\sum_{k=1}^n x_k$  et  $\sum_{l=1}^p y_l$  est une somme de  $np$  termes. En effet nous avons

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{l=1}^p y_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_k y_l \quad (1.1)$$

car

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_p) = x_1(y_1 + \cdots + y_p) + x_2(y_1 + \cdots + y_p) + \cdots + x_n(y_1 + \cdots + y_p).$$

**Remarque IV.2.** Dans l'expression de gauche de la formule (1.1) nous aurions pu prendre la même lettre pour les indices  $k$  et  $l$ , mais nous ne pouvons pas le faire dans l'expression de droite.

**Remarque IV.3.** On peut intervertir l'ordre des sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_k y_l &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^p x_k y_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k y_1 + \cdots + x_k y_p) \\ &= (x_1 y_1 + \cdots + x_1 y_p) + (x_2 y_1 + \cdots + x_2 y_p) + \cdots + (x_n y_1 + \cdots + x_n y_p) \\ &= \sum_{l=1}^p \left( \sum_{k=1}^n x_k y_l \right) \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n x_k y_l. \end{aligned}$$

**Remarque IV.4.** Nous avons :

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{l=1}^n x_l \right) = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k x_l = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k < l} x_k x_l.$$

Nous venons de voir le cas où il n'y a qu'un seul indice, mais souvent dans la pratique nous avons besoin de plusieurs indices. Nous noterons par exemple

$$(x_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,p}$$

les nombres  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}, x_{21}, \dots, x_{np}$ . La notation

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_{ij}$$

signifie  $x_{11} + \cdots + x_{np}$ . On note parfois cette somme double :

$$\sum_{i,j} x_{ij}.$$

**Remarque IV.5.** La formule

$$\sum_{k=1}^n a_k x^k$$

signifie en général

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n,$$

où

$$x^k = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{k \text{ fois}}.$$

**Définition IV.6** (Symbole de Kronecker). On appelle symbole de Kronecker les nombres  $\delta_{ij}$  définis par :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \text{ si } i = j, \\ \delta_{ij} &= 0 \text{ si } i \neq j. \end{aligned}$$

## IV.2 Définitions

On supposera toujours ici que les ensemble  $I$  et  $J$  sont non vides.

**Définition IV.7** (Famille, sous-famille). Soient  $I$  et  $E$  deux ensembles. Une application  $f$  de  $I$  dans  $E$  s'appelle également une famille d'éléments de  $E$ . On utilise alors la notation indicielle :  $I$  s'appelle l'ensemble d'indices, l'image  $f(i)$  d'un élément  $i \in I$  se note  $x_i$  et la famille  $f$  est notée  $(x_i)_{i \in I}$ . Si  $J$  est un sous-ensemble de  $I$  la restriction de  $f = (x_i)_{i \in I}$  à  $J$ , notée  $(x_j)_{j \in J}$ , est appelée sous-famille de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ .

**Remarque IV.8.** (i) Si  $I$  est fini, la famille est dite finie. Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , on note cette famille  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ .  
(ii) Si  $I = \mathbf{N}$ , la famille  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  s'appelle aussi une suite d'éléments de  $E$ .  
(iii) Une suite extraite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une sous-famille de la forme  $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$  où  $y_i = x_{\varphi(i)}$  et  $\varphi$  est une application de  $\mathbf{N}$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$  strictement croissante.

On utilisera souvent les familles d'ensembles c'est-à-dire une famille d'éléments de  $\mathcal{P}(E)$ . On notera une telle famille  $(A_i)_{i \in I}$ , les  $A_i$  étant des éléments de  $\mathcal{P}(E)$ , c'est-à-dire des sous-ensembles de  $E$ .

**Définition IV.9** (Union et intersection d'un nombre quelconque d'ensembles). Soit  $E$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$

(i) on appelle union des ensembles  $A_i$ ,  $i \in I$ , l'ensemble noté  $\bigcup_{i \in I} A_i$  des éléments qui appartiennent à au moins un ensemble  $A_i$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x, \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

(ii) On appelle intersection des ensembles  $A_i$ ,  $i \in I$ , l'ensemble noté  $\bigcap_{i \in I} A_i$  des éléments qui appartiennent à tous les ensembles  $A_i$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

**Exemple IV.10.** Soit  $A_i = [i; i+1[$   $i \in \mathbf{R}$

(i) Si  $I = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$  alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = [0, 1[ \cup [1/2, 3/2[ \cup [1, 2[ \cup [3/2, 5/2[ \cup [2, 3[ = [0, 3[.$$

(ii) Si  $I = \{2^{-p}, p \in \mathbf{N}\}$  alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} [2^{-p}, 2^{-p} + 1[ = ]0, 2[.$$

(iii) Si  $I = [0, 1/2[$  alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = [0, 3/2[.$$

**Remarque IV.11.** Si  $\text{Card}(I) = 2$  on retrouve les définitions de l'union et de l'intersection de deux ensembles.

**Notation IV.12.** (i) Si  $I = \{1, 2, \dots, p\}$  on note aussi :

$$\bigcup_{i \in I} = \bigcup_{i=1}^p$$

et

$$\bigcap_{i \in I} = \bigcap_{i=1}^p.$$

(ii) Si  $I = \mathbf{N}$  on note aussi :

$$\bigcup_{i \in I} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} = \bigcup_{i=0}^{+\infty}$$

$$\bigcap_{i \in I} = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} = \bigcap_{i=0}^{+\infty}.$$

Les propriétés II.31 et III.21 se généralisent aux cas des familles d'ensembles.



**Propriété IV.13.** Soient  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_j)_{j \in J}$  deux familles de parties d'un ensemble  $E$  alors :

(i)

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j);$$

(ii)

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j);$$

(iii)

$$C_E \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (C_E A_i);$$

(iv)

$$C_E \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (C_E A_i);$$

(v)

$$f^{-1} \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i);$$

(vi)

$$f^{-1} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i).$$

### IV.3 Produits

**Définition IV.14.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles, on appelle produit de la famille  $(A_i)_{i \in I}$  l'ensemble, noté  $\prod_{i \in I} A_i$ , des familles  $(x_i)_{i \in I}$  avec, pour tout  $i \in I$ ,  $x_i \in A_i$ .

**Propriété IV.15.** (i) Si pour tout  $i$ ,  $A_i \neq \emptyset$ , alors  $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .

(ii) La contraposée de la propriété précédente s'écrit :

Si  $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$  alors il existe un indice  $i \in I$  tel que  $A_i = \emptyset$ .

**Notation IV.16.** (i) Si pour tout  $i \in I$ ,  $A_i = E$ , on note  $\prod_{i \in I} A_i = E^I$ .

(ii) On retrouve ainsi la notation de l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ ,  $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ .

**Remarque IV.17.** Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , on note aussi  $(x_i)_{i=1, \dots, n} = (x_1, \dots, x_n)$  et

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n.$$

## V Relation d'équivalence

### V.1 Définitions

**Définition V.1** (Relation binaire). On appelle relation binaire sur un ensemble  $E$ , la donnée d'un sous-ensemble  $\Gamma$  de  $E \times E$ . On notera  $x R y$ , et on dira que l'élément  $x$  de  $E$  est en relation avec l'élément  $y$  de  $E$ , lorsque le couple  $(x, y)$  appartiendra à  $\Gamma$ .

**Définition V.2** (Relation d'équivalence). Soit  $R$  une relation binaire sur  $E$ .  $R$  est une relation d'équivalence sur  $E$  si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout  $x \in E$ ,  $x R x$  (réflexivité);

(ii) pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x R y \Rightarrow y R x$  (symétrie);

(iii) Pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ ,  $(x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$  (transitivité).

**Définition V.3** (Classe d'équivalence). Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . On appelle classe d'équivalence de  $x$  l'ensemble noté  $[x]$  de tous les éléments de  $E$  qui sont en relation avec  $x$  :

$$[x] = \{y \in E, xRy\}.$$

- Propriété V.4.** (i)  $[x] \neq \emptyset$  car  $x \in [x]$  ;  
(ii) Si  $y \in [x]$  alors  $[y] = [x]$  ;  
(iii) Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  alors  $[x] \cap [y] = \emptyset$  ou  $[x] = [y]$ .

*Démonstration*

- (i) Évident.  
(ii) Si  $y \in [x]$  alors  $xRy$  et donc  $yRx$  grâce à la symétrie et donc  $x \in [y]$ . Montrons maintenant que  $[y] \subset [x]$ . Soit donc  $z \in [y]$  alors  $yRz$ , mais comme  $y \in [x]$ , on a  $xRy$ , donc par transitivité  $xRz$  et  $z \in [x]$ . Il reste à montrer l'inclusion inverse, mais elle est immédiate. En effet si  $y \in [x]$ , on a vu qu'alors  $x \in [y]$ . Donc en intervertissant les rôles de  $x$  et  $y$  dans la démonstration de  $[y] \subset [x]$ , on démontre que  $[x] \subset [y]$ .  
(iii) Si  $y \in [x]$  alors le point précédent dit que  $[x] = [y]$ . Si  $y \notin [x]$  alors  $[x] \cap [y] = \emptyset$  ; sinon il existe  $z \in [x] \cap [y]$  et donc  $xRz$  et  $yRz$ , mais cela implique que  $xRy$ , ce qui n'est pas possible.

□

**Définition V.5** (Ensemble quotient). Soit  $R$  une relation d'équivalence sur l'ensemble non vide  $E$ . Le sous-ensemble de  $\mathcal{P}(E)$  constitué des classes d'équivalence s'appelle l'ensemble quotient de  $E$  par  $R$  et se note  $E/R$ .

**Définition V.6** (Partition). On appelle partition d'un ensemble  $E$ , tout sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{P}(E)$  dont les éléments sont non vides, disjoints deux à deux et dont la réunion donne  $E$  :

- (i)  $\forall A \in \mathcal{S}, A \neq \emptyset$  ;  
(ii)  $\forall (A, B) \in \mathcal{S}^2, A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$  ;  
(iii)  $\cup_{A \in \mathcal{S}} A = E$ .

**Théorème V.7.** Soit  $R$  une relation d'équivalence sur l'ensemble non vide  $E$ , l'ensemble quotient  $E/R$  est une partition de  $E$  et réciproquement si  $\mathcal{S}$  est une partition de  $E$  il existe une relation d'équivalence et une seule  $R$  telle que  $\mathcal{S} = E/R$ .

*Démonstration*

L'implication est immédiate. Pour la réciproque, soit donc  $\mathcal{S}$  une partition de  $E$  non vide. Si  $R$  existe, les classes de  $R$  sont les éléments de  $\mathcal{S}$ , par suite la relation doit être :

$$xRy \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{S}, x \in A \text{ et } y \in A.$$

On a donc l'unicité. Pour l'existence, il suffit de vérifier que la relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence, ce qui est immédiat. □

Si  $R$  est une relation d'équivalence sur  $E$  non vide, d'après ce qui précède pour tout  $x$  dans  $E$  il existe un unique élément  $A$  de  $E/R$  tel que  $x \in A$  ( $A = [x]$ ).

**Définition V.8** (projection canonique). Soit  $R$  une relation d'équivalence sur  $E$  non vide. On appelle projection canonique de  $E$  dans  $E/R$  l'application surjective

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E/R \\ x &\longmapsto p(x) = [x]. \end{aligned}$$

**Théorème V.9** (Décomposition canonique d'une application). Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On désigne par  $R$  la relation dans  $E$  définie par :

$$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Alors  $R$  est une relation d'équivalence ; si  $j$  désigne l'injection :

$$\begin{aligned} j : f(E) &\longrightarrow F \\ y &\longmapsto j(y) = y, \end{aligned}$$

et si  $p$  désigne la projection canonique de  $E$  dans  $E/R$ , alors il existe une application unique  $\bar{f} : E/R \rightarrow f(E)$  telle que  $f = j \circ \bar{f} \circ p$ . De plus  $\bar{f}$  est une bijection.

*Démonstration*

Le fait que  $R$  soit une relation d'équivalence est trivial. Par construction  $f$  est constante sur les classes d'équivalence de  $R$ . On définit alors  $\bar{f}$  par l'application qui à une classe d'équivalence associe cette valeur commune :  $\bar{f}([x]) = f(y)$  pour tout  $y \in [x]$ ; ceci montre l'existence et l'unicité. Montrons maintenant que  $\bar{f}$  est une bijection. Pour la surjectivité, il suffit d'écrire que pour tout  $y \in f(E)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$  et donc  $\bar{f}([x]) = f(x) = y$ . Pour l'injectivité considérons  $A$  et  $B$  dans  $E/R$  tels que  $\bar{f}(A) = \bar{f}(B)$  et soit  $x \in A$  et  $y \in B$ , alors  $f(x) = \bar{f}([x]) = \bar{f}(A) = \bar{f}(B) = \bar{f}([y]) = f(y)$ ; donc  $xRy$  et  $A = B$ .  $\square$

On peut "visualiser" la décomposition canonique par le diagramme dit commutatif 1.4.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ p \downarrow & & \uparrow j \\ E/R & \xrightarrow{\bar{f}} & f(E) \end{array}$$

FIGURE 1.4 – Schéma commutatif de la décomposition canonique d'une application.

## VI Relation d'ordre

**Définition VI.1.** Soit  $R$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ . On dit que  $R$  est une relation d'ordre si et seulement si

- (i) pour tout  $x \in E$ ,  $xRx$  (réflexivité);
- (ii) pour tout  $(x, y, z) \in E^3$  ( $xRy$  et  $yRz$ )  $\Rightarrow$   $xRz$  (transitivité);
- (iii) pour tout  $(x, y) \in E^2$  ( $xRy$  et  $yRx$ )  $\Rightarrow$   $x = y$  (antisymétrie).

Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit un ensemble ordonné.

**Notation VI.2.** Le plus souvent une relation d'ordre est notée  $\leq$ . Dans ce cas on note aussi ( $x \leq y$  et  $x \neq y$ ) par  $x < y$

**Définition VI.3** (Ensemble ordonné). On appelle ensemble ordonné tout ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $R$ .

**Définition VI.4** (Ordre total). Un ordre est dit total si  $x \neq y \Rightarrow ((x < y) \text{ ou } (y < x))$ . Il est dit partiel dans le cas contraire.

**Exemple VI.5.** Sur  $\mathbf{N}$  la relation  $\leq$  est un ordre total.

**Exemple VI.6.** Sur  $\mathcal{P}(E)$  la relation  $\subset$  est un ordre partiel si  $\text{card}(E) > 1$ .

**Définition VI.7** (plus grand élément, plus petit élément). Soit  $E$  un ensemble ordonné, on appelle plus grand élément ou élément maximum (respectivement plus petit élément ou élément minimum), l'élément  $M = \text{Max } E$  (respectivement  $m = \text{Min } E$ ) de  $E$ , s'il existe, tel que pour tout  $x \in E$ ,  $x \leq M$  (respectivement  $m \leq x$ ).

**Remarque VI.8.** Dans la définition on parle de l'élément avec l'article défini et non d'un élément avec l'article indéfini. Ceci implique que cet élément s'il existe est unique. En effet si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux plus grands éléments alors  $M_1 \leq M_2$  et  $M_2 \leq M_1$ , donc  $M_1 = M_2$ .

### Exemple VI.9.

Dans  $\mathcal{P}(E)$ ,  $E$  est un plus grand élément et  $\emptyset$  est un plus petit élément.

L'ensemble  $\mathbf{N}$  possède 0 comme plus petit élément mais ne possède pas de plus grand élément.

Toute partie non vide de  $\mathbf{N}$  admet un plus petit élément (cette propriété de  $\mathbf{N}$  est fondamentale).

**Définition VI.10** (Majorant, minorant, partie bornée). Soient  $E$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $E$ . Un élément  $M$  (respectivement  $m$ ) de  $E$  est dit un majorant (respectivement minorant) de  $A$  si et seulement si pour tout  $x \in A$ ,  $x \leq M$  (respectivement  $m \leq x$ ). Si  $A$  admet au moins un majorant (respectivement minorant) on dit que  $A$  est majorée (respectivement minorée).

$A$  est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

### Exemple VI.11.

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $\mathcal{P}(E)$  ordonné par l'inclusion.  $A = \{\{x\}, x \in E\} \subset \mathcal{P}(E)$  est majoré dans  $\mathcal{P}(E)$  par  $E$ , mais il n'est pas majoré dans  $\mathcal{P}(E) \setminus E$ .

Dans  $\mathbf{R}$ ,  $[0, 1[$  est majoré par 1, par 10 par 10 000.

**Définition VI.12** (borne sup, borne inf). Soient  $E$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $E$ . La borne sup (respectivement borne inf) de  $A$  dans  $E$  est, s'il existe, le plus grand élément noté  $\text{Sup}_E A$ , ou  $\text{Sup } A$  s'il n'y a pas de confusion possible, (respectivement plus petit élément noté  $\text{Inf}_E A$ , ou  $\text{Inf } A$ ) de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) de  $A$  dans  $E$ .

**Remarque VI.13.** Soit  $A$  une partie d'un ensemble totalement ordonné  $E$ . Un élément  $M$  est une borne supérieure de  $A$  dans  $E$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tout  $x \in A$ ,  $x \leq M$  ( $M$  est un majorant de  $A$  dans  $E$ );
- (ii) Pour tout  $y$  dans  $E$  tel que  $y < M$ , il existe  $x \in A$  tel que  $y < x$ .

**Exemple VI.14.** (i) La borne sup de  $[0, 1[$  est 1.

- (ii) La borne sup de  $[0, 1] \cup [3, 4]$  est 4.

**Remarque VI.15.** Si  $A$  possède un plus grand élément (respectivement un plus petit élément) alors c'est la borne sup de  $A$  (respectivement la borne inf de  $A$ ) :  $\text{Max } A = \text{Sup } A$  (respectivement  $\text{Min } A = \text{Inf } A$ ).

## VII Équation

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $E$  dans  $F$ . Résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  c'est chercher les  $x \in E$  dont les images par  $f$  et  $g$  coïncident.

**Remarque VII.1.** Ici dans l'écriture  $f(x) = g(x)$  le signe  $=$  n'a pas la même signification que par exemple dans  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ . En effet cette dernière expression signifie que le membre de gauche est toujours égale au membre de droite, alors que lorsque l'on veut résoudre  $f(x) = g(x)$  on cherche  $x$  tel que l'égalité soit vraie.

Soit  $E = F = \mathbf{R}$  alors résoudre  $f(x) = g(x)$  est équivalent à résoudre  $h(x) = 0$  où :

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto h(x) = f(x) - g(x) \end{aligned}$$

Résolvons maintenant les équations dans  $\mathbf{R}$  du premier degré. Soit donc

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  sont fixés. Résoudre  $f(x) = 0$  conduit alors immédiatement aux deux cas suivants :

- (i) Si  $a \neq 0$  alors  $S = \{-b/a\}$
- (ii) Si  $a = 0$  alors
  - (a) Si  $b \neq 0$  alors  $S = \emptyset$
  - (b) Si  $b = 0$  alors  $S = \mathbf{R}$

Résolvons maintenant les équations dans  $\mathbf{R}$  du deuxième degré. Soit donc

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

- (i) Si  $a = 0$  alors nous sommes ramenés au cas précédent.
- (ii) Si  $a \neq 0$  alors

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Nous avons donc trois possibilités :

- (a) Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  alors

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

et donc  $f(x) > 0$  pour tout  $x$ . Par suite  $S = \emptyset$ .

(b) Si  $\Delta = 0$  alors  $S = \{-b/2a\}$

(c) Si  $\Delta > 0$  alors  $\Delta = \delta^2$  avec  $\delta > 0$  et

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b-\delta}{2a} \right) \left( x + \frac{b+\delta}{2a} \right) \right]$$

il y a donc deux solutions

$$S = \left\{ \frac{-b+\delta}{2a}, \frac{-b-\delta}{2a} \right\}$$

## VIII Exercices

### VIII.1 Exercices avec solutions

▷ **Exercice 1.** On considère les données suivantes

-1	0	1	2	3
1	0	1	4	9

On note  $(x_i)_{i=1,\dots,5}$  (respectivement  $(y_i)_{i=1,\dots,5}$ ) les données de la première (respectivement deuxième) ligne.

1.1. Calculer  $\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i$  et  $\bar{y} = \sum_{i=1}^5 y_i$ .

1.2. Calculer

$$SPE(x, y) = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

$SPE$  signifie somme des produits des écarts.

1.3. Calculer

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}.$$

Correction

1.1.  $\bar{x} = 1$  et  $\bar{y} = 3$ .

1.2. Calculer

$$SPE(x, y) = 20.$$

1.3.

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 35 - 5 \times 1 \times 3 = 20.$$

□

▷ **Exercice 2.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

2.1. Comment, à l'aide de  $f(x)$ , écrire que  $f$  est positive ?

2.2. Écrire la négation de l'assertion précédente.

2.3. Que pensez-vous de " $\forall x \in \mathbf{R}, ((f(x) \geq 0) \text{ ou } (f(x) \leq 0))$ " ?

2.4. Que pensez-vous de " $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 0)$ " ?

Correction

2.1.  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ .

2.2. La négation s'écrit  $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ .

2.3. L'assertion affirme que pour tout nombre réelle le nombre réelle  $f(x)$  est (positif ou nul) ou est (négatif ou nul). Cette assertion est donc vraie.

2.4. Cette assertion signifie que  $f$  est positive ou nulle ou que  $f$  est négative ou nulle. Ce qui est en général faux.

□

▷ **Exercice 3.** Soient  $A, B, C$  trois ensembles tels que  $A \cup C \subset A \cup B$  et  $A \cap C \subset A \cap B$ . Montrez que  $C$  est inclus dans  $B$

Correction

Soit  $x$  dans  $C$ , alors  $x \in A \cup C \subset A \cup B$ . Par suite  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Nous avons donc deux cas

- Si  $x \in A$ , alors  $x \in A \cap C \subset A \cap B$  et donc  $x \in B$  ;
- Si  $x \notin A$ , alors  $x \in B$ .

Dans ces deux cas  $x \in B$ .  $\square$

- ▷ **Exercice 4.** Soit  $I$  un ensemble fini d'indices et  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_i)_{i \in I}$  deux familles de parties d'un ensemble  $E$  telles que pour tout  $i \in I$ ,  $A_i \cup B_i = E$ . Démontrer que :

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = E.$$

*Correction*

On a  $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) \subset E$ . Il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. Soit donc  $x \in E$  on a alors deux cas exclusifs :

- Soit il existe  $i \in I$  tel que  $x \in A_i$  ; alors  $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i)$ .
- Soit pour tout  $i \in I$ ,  $x \notin A_i$ , mais alors pour tout  $i \in I$ ,  $x \in B_i$  et donc  $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$  et  $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i)$ .

En échangeant les rôles des ensembles  $A_i$  et  $B_i$  on a la deuxième égalité.  $\square$

- ▷ **Exercice 5.** On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^{2x+1}. \end{aligned}$$

**5.1.** Déterminer  $f^{-1}(\{1, e\})$ .

**5.2.** Soit  $y \in \mathbf{R}_+^*$ , déterminer  $f^{-1}(\{y\})$ .

**5.3.**  $f$  est-elle bijective ?

*Correction*

**5.1.** La fonction exponentielle est une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  de fonction réciproque  $\log$ , donc

$$f(x) = 1 \iff e^{2x+1} = 1 \iff 2x+1 = \log 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

et

$$f(x) = e \iff e^{2x+1} = e \iff 2x+1 = \log e = 1 \iff x = 0.$$

Par suite  $f^{-1}(\{1, e\}) = \{0, -1/2\}$ .

**5.2.** Soit  $y \in \mathbf{R}_+^*$ , la fonction  $\log$  étant bijective on a :

$$y = e^{2x+1} \iff \log y = 2x+1 \iff x = \frac{-1 + \log y}{2}.$$

Donc

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{ \frac{-1 + \log y}{2} \right\}.$$

**5.3.** Tout élément  $y \in \mathbf{R}_+^*$  admet un antécédent et un seul, par suite  $f$  est une bijection.

$\square$

- ▷ **Exercice 6.** Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On définit l'application

$$\begin{aligned} u_A : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto X \cap A. \end{aligned}$$

**6.1.** Montrer que si  $A \neq E$  alors  $u_A$  n'est pas injective.

**6.2.** Montrer que  $u_A$  est surjective si et seulement si  $A = E$ .

*Correction*

**6.1.** Si  $A \neq E$  alors  $u_A(A) = A = u_A(E)$  et donc  $u_A$  n'est pas bijective.

**6.2.** — *Implication.*

Supposons donc que  $u_A$  soit surjective, alors il existe  $B \subset E$  tel que  $u_A(B) = B \cap A = E$ . Par suite  $A = E$ .

— *Réciproque.*

Si  $A = E$  alors  $u_A = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$  est une bijection, elle est donc surjective.

□

▷ **Exercice 7.** On définit sur  $\mathbf{Z}$  la relation binaire  $xRy \iff x - y$  est divisible par 9, c'est-à-dire

$$xRy \iff \exists p \in \mathbf{Z}, x - y = 9p.$$

**7.1.** Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.

**7.2.** Donner les classes d'équivalence.

**7.3.** Montrer que tous les nombres  $10^n, n \in \mathbf{N}$  sont dans la même classe d'équivalence.

**7.4.** Soient  $[q]$  et  $[q']$  deux éléments de  $\mathbf{Z}/R$ . On définit l'addition de  $[q]$  et  $[q']$  par  $[q] \dot{+} [q'] = [q + q']$ . Montrer que ceci est bien défini, c'est-à-dire que cette somme ne dépend pas des éléments de  $\mathbf{Z}$  pris dans les classes  $[q]$  et  $[q']$ .

**7.5.** Soit  $a = a_n \dots a_1 a_0 = a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0$  où  $a_n, \dots, a_0$  sont des éléments de  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Montrer que  $[a] = [a_n + \dots + a_0]$ .

*Correction*

**7.1.** (i) *Réflexivité.*

Pour tout  $x \in \mathbf{Z}, x - x = 0 = 0 \times 9$ , donc  $xRx$ .

(ii) *Symétrie.*

Supposons que  $xRy$ , alors il existe  $p \in \mathbf{Z}$  tel que  $x - y = 9p$ , donc  $y - x = 9(-p)$  et  $yRx$ .

(iii) Soient  $x, y$  et  $z$  trois entiers relatifs tels que  $xRy$  et  $yRz$ , donc il existe  $p$  et  $p'$  dans  $\mathbf{Z}$  tels que  $x - y = 9p$  et  $y - z = 9p'$ . Par suite  $x - z = (x - y) + (y - z) = 9p + 9p' = 9(p + p')$  et  $xRz$ .

**7.2.** Il y a 9 classes d'équivalence :

—  $[0] = \{x \in \mathbf{Z} / x = 9p\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 9.

—  $[1] = \{x \in \mathbf{Z} / x = 9p + 1\}$ .

—  $\vdots$

—

—  $[8] = \{x \in \mathbf{Z} / x = 9p + 8\}$ .

**7.3.**  $10^n = \underbrace{9 \dots 9}_{n \text{ fois}} + 1 = 9 \times \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois}} + 1 \in [1]$ .

**7.4.** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments respectivement de  $[q]$  et  $[q']$ . On peut toujours considérer que  $q$  et  $q'$  sont dans  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Donc  $x = 9p + q$  et  $y = 9p' + q'$  et  $x + y = 9(p + p') + q + q' \in [q + q']$ .

**7.5.**

$$[a] = [10^n a_n] \dot{+} \dots \dot{+} [10a_1] \dot{+} [a_0] = [a_n] \dot{+} \dots \dot{+} [a_1] \dot{+} [a_0] = [a_n + \dots + a_0].$$

Nous venons de démontrer en particulier qu'un nombre entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

□

## VIII.2 Exercices avec indication

▷ **Exercice 8.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, et le justifier.

(i)  $\forall x \in E, \exists y \in E, x \leq y$  ;

(ii)  $\exists y \in E, \forall x \in E, x \leq y$  ;

(iii)  $\forall x \in E, \exists y \in E, x < y$  ;

(iv)  $\forall y \in E, \forall x \in E, x \leq y$ .

▷ **Exercice 9.** Soit  $(A_i)_{i \in I}, I = \{1, \dots, n\}$  une famille finie de parties d'un ensemble  $E$ . En admettant les lois de Morgan de la propriété II.31 démontrer que



**9.1.**

$$\bigcup_{i \in I} (C_E A_i) = C_E \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right);$$

**9.2.**

$$\bigcap_{i \in I} (C_E A_i) = C_E \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right).$$

*Indication***9.1.** *La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ .***9.2.** *Idem.*

□



# Bibliographie

- [1] C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel, N. Cleirec, P.Connault, Y. Gentric J.-M. Cornil, F. Lussier, C. Mullaert, and S. Nicolas. *Mathématiques tout-en-un, MPSI*. Dunod, 2013. [1](#)