



TD 4 – Intégrales de fonctions mesurables

On notera λ la mesure de Lebesgue.

▷ **Exercice 1.** Pour chacune des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions boréliennes de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} suivantes, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\lambda.$$

1.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$

1.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}.$

1.3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos x \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$

▷ **Exercice 2.** On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \, d\lambda(x) \, d\lambda(y)$$

2.1. Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à I .

2.2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+x^2y} \, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2}.$$

2.3. En déduire que $I = \frac{\pi^2}{2}$.

2.4. Retrouver ce résultat directement en utilisant le changement de variables :

$$\begin{cases} v = x\sqrt{y} \\ t = \sqrt{y} \end{cases}$$

▷ **Exercice 3.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On dit que $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, si

$$\int_E |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

On pose alors

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de L^2 qui convergent vers f et g dans L^2 . Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^1 .

Exercices supplémentaires.

▷ **Exercice 4.** Soit F la fonction définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} d\lambda(x).$$

4.1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.

4.2. Calculer $F(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

▷ **Exercice 5.** Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$ sur $[0, 1]$.

5.1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

5.2. Pour x fixé dans $[0, 1]$, étudier le maximum de la fonction en t :

$$g_x(t) = \frac{t^{3/2}x}{1+t^2x^2}, \quad t \geq 0.$$

5.3. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 0.$$

▷ **Exercice 6.** On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)} d\lambda(x).$$

6.1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.

6.2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* .

6.3. Montrer que F admet une dérivée à droite en 0. Dans le calcul de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$, on pourra faire le changement de variable $x = u^2t^2$ puis utiliser le théorème de convergence dominée.

6.4. F est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

▷ **Exercice 7.** Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$.

7.1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors $L^q(E, \mathcal{A}, \mu) \subset L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.

7.2. Montrer qu'il existe une constante C dépendant de p, q et $\mu(E)$ telle que :

$$\forall f \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p \leq C \|f\|_q.$$

7.3. Conclure sur l'injection de $L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.