

Intégration

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

Olivier COTS

15 novembre 2022

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

- 4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
 - 4.1.1. Définitions
 - 4.1.2. Linéarité
- 4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout
 - 4.2.1. Définitions
 - 4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout
- 4.3. Introduction à l'espace L^1
 - 4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé
 - 4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé
- 4.4. Introduction aux espaces L^p
 - 4.4.1. Définitions
 - 4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel
 - 4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\int_E f \, d\mu$$

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\int_E f \, d\mu$$

Remarque 4.1.1. On considère des fonctions mesurables de signe quelconque à valeurs dans \mathbb{R} pour éviter les formes indéterminées comme

$$+\infty - +\infty.$$

Nous avons déjà noté \mathcal{E} l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et \mathcal{M} celui des fonctions mesurables de (E, \mathcal{A}) à valeurs dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, i.e. $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, donc nous n'introduisons pas de nouvelles notations pour $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 4.1.2. Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Nous pouvons toujours écrire f sous la forme

$$f = f^+ - f^-$$

avec

$$f^+ := f \mathbb{1}_{f>0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad f^- := -f \mathbb{1}_{f<0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Définition 4.1.1 – Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ **admet une intégrale** si f^+ ou f^- est intégrable.

Si f^+ et f^- sont intégrables alors on dit que f est **μ -intégrable** (ou **intégrable**).

Si f admet une intégrale, ce qui est le cas si f est intégrable, alors on définit **l'intégrale de f sur E par rapport à μ** par

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition 4.1.2

On notera $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou \mathcal{L}^1 , l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 4.1.3. Bien noter \mathcal{L}^1 car la notation L^1 fera référence à un autre espace.

Proposition 4.1.3

Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu < +\infty$$

et donc $|f| \in \mathcal{L}^1$. **Réciproquement**, $|f| \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$.

► Par définition, f^+ et f^- sont intégrables et

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu < +\infty,$$

par **additivité** (on rappelle que $|f| = f^+ + f^-$). De même, on démontre que $-\int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$. ■

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\int_E f \, d\mu$$

Théorème 4.1.4 – Linéarité de l'intégrale

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

L'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel** et l'application

$$\begin{array}{ccc} T: & \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto T(f) := \int_E f \, d\mu \end{array}$$

est une **forme linéaire croissante**.

► Montrons que $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel**.

Soient f, g dans \mathcal{L}^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$$

et puisque par **additivité et homogénéité positive** de l'intégrale sur \mathcal{M}_+

$$\int (|\lambda||f| + |g|) \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu,$$

alors par le **théorème de comparaison**, $|\lambda f + g|$ est intégrable, donc d'après la **proposition précédente**, $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$.

- Montrons que $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ pour f, g dans \mathcal{L}^1 .

Tout d'abord, par définition

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ainsi

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \geq 0$$

et donc par **additivité** de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ on a

$$\int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f + g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

ce qui donne puisque toutes ces quantités sont finies

$$\int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

autrement dit

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- Montrons que $\int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$ pour f dans \mathcal{L}^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $\lambda f = \lambda(f^+ - f^-) = \lambda f^+ - \lambda f^-$ mais surtout que

$$\lambda > 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-,$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ = -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+.$$

Ainsi, en utilisant la **homogénéité positive** de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ , on a :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \int \lambda f \, d\mu = \int \lambda f^+ \, d\mu - \int \lambda f^- \, d\mu = \lambda \int f^+ \, d\mu - \lambda \int f^- \, d\mu,$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \int \lambda f \, d\mu = \int -\lambda f^- \, d\mu - \int -\lambda f^+ \, d\mu = -\lambda \int f^- \, d\mu - (-\lambda) \int f^+ \, d\mu.$$

et donc dans les deux cas $\int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$.

Les deux points précédents démontrent la linéarité de l'application $T : T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. Ainsi T est bien une forme linéaire, car définie sur un espace vectoriel et à valeurs dans \mathbb{R} .

- Montrons que $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ pour f, g dans \mathcal{L}^1 si $f \leq g$, i.e. montrons que T est croissante.

En fait, T est une forme linéaire **positive** donc croissante.

En effet, posons $h := g - f$. Alors $h = h^+ \geq 0$ et puisque alors $h \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ il vient que $T(h) \geq 0$ (T est donc positive).

Mais $T(h) = T(g) - T(f)$ par **linéarité** de T et donc $T(g) \geq T(f)$.



Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\mu(A) = 0$$

Définition 4.2.1 – Ensemble négligeable

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un **ensemble négligeable** (ou μ -négligeable) si $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.2.1. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Au lieu d'écrire $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ si f est nulle sauf sur un **ensemble négligeable**, on notera souvent

$$f = 0 \text{ } \mu\text{-presque partout} \quad \text{ou} \quad f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.},$$

ou encore $f = 0$ p.p., et on dira que f est μ -presque partout nulle.

Cette terminologie bien pratique est définie au slide suivant de manière générale.

Définition 4.2.2 – Propriété vraie μ -p.p.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soient $A \in \mathcal{A}$ un **ensemble négligeable** et une propriété P qui dépend de $x \in E$.

Si l'on a

$$\{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\} \subset A,$$

alors on dira que $P(x)$ est vraie "pour μ -presque tout x " ou que **P est vraie μ -p.p.**

Remarque 4.2.2. Il est possible dans certains contextes que P soit fausse sur un ensemble non mesurable inclus dans un ensemble négligeable. Dans ce cas, il serait **incorrect** de dire que " **P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable**". On peut en revanche toujours dire que " **P est vraie au moins sur le complémentaire d'un ensemble négligeable**".

Pour éviter ces difficultés, il est commode d'introduire la notion de **tribu complétée** à laquelle on ajoute (entres autres) toutes les parties de E incluses dans un ensemble négligeable. Ainsi, dans ce contexte, on pourra alors toujours dire que " **P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable**". Cette notion est introduite au chapitre 5.

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\mu(A) = 0$$

Théorème 4.2.3

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., c-a-d si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, alors

$$\int_E f \, d\mu = 0$$

et la réciproque est vraie si $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

► Nous avons, cf. **Chapitre 3**, que pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$:

$$\int_E f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Or si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., alors $f^+ = f\mathbb{1}_{f>0}$ et $f^- = -f\mathbb{1}_{f<0}$ le sont aussi, et puisque f^+ et f^- sont positives alors leurs intégrales sont nulles. Ainsi, $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = 0.$$



Corollaire 4.2.4

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $A \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable. Alors

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

► Par **définition**,

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu,$$

et par le **théorème précédent**, $\int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu = 0$. ■

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Exercice : faire l'exercice.

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

► On a toujours $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$. Puisque f intégrable sur $A \cup B$, alors f intégrable sur A , B et $A \cap B$, cf. $|f\mathbb{1}_A| \leq |f\mathbb{1}_{A \cup B}|$, etc.

Par **linéarité** de l'intégrale

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu - \int_{A \cap B} f \, d\mu$$

mais $\int_{A \cap B} f \, d\mu = 0$ car $\mu(A \cap B) = 0$, cf. **corollaire précédent**. ■

Lemme 4.2.1. *Si $f = g$ μ -p.p., alors f est intégrable (resp. admet une intégrale) ssi g est intégrable (resp. admet une intégrale).*

► Comme $f = g$ μ -p.p., alors il est clair que $f^+ = g^+$ μ -p.p. et $f^- = g^-$ μ -p.p.

Il suffit donc de montrer que pour toutes f, g dans \mathcal{M}_+ , si $f = g$ μ -p.p. alors

$$\int f \, d\mu < +\infty \quad \text{ssi} \quad \int g \, d\mu < +\infty.$$

En fait, nous avons déjà démontré mieux (cf. **Chapitre 3**) :

$\forall f, g \in \mathcal{M}_+$, si $f = g$ μ -p.p. alors on a l'égalité $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. ■

Théorème 4.2.6

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soient $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $f = g$ μ -p.p. Alors,

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

► D'après le lemme 4.2.1, $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Par **linéarité** de l'intégrale,

$$\int f \, d\mu - \int g \, d\mu = \int (f - g) \, d\mu.$$

La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc d'après le **théorème précédent**,

$$\int (f - g) \, d\mu = 0.$$



■ **Remarque 4.2.3.** On retiendra que deux fonctions égales p.p. ont la même intégrale.

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$f \sim_{\mu} g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Définition 4.3.1

Soit F un espace vectoriel. Une fonction $N: F \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** si

- i) $\forall u \in F$: $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_F$ (séparation) ;
- ii) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$: $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$ (absolue homogénéité) ;
- iii) $\forall (u, v) \in F^2$: $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (sous-add. / inég. triangulaire).

Si i) est remplacé par

$$\text{i')} \quad N(0_F) = 0,$$

alors on parle de **semie-norme**.

Remarque 4.3.1. On rappelle qu'une norme N sur un espace vectoriel F induit une topologie sur F , la topologie induite par la distance $d(u, v) := N(u - v)$.

On rappelle que l'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou \mathcal{L}^1) est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui sont μ -intégrable, c-a-d t.q.

$$\int_E |f| \, d\mu < +\infty.$$

Pour toute $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, on pose

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_E |f| \, d\mu.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$ est un espace vectoriel semi-normé.

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$ est un espace vectoriel semi-normé.

► Nous avons déjà que \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel, cf. Section 4.1.

■ Montrons que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ est une semi-norme.

i) Si $f = 0 \in \mathcal{L}^1$ alors $|f| = 0$ et donc $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f| d\mu = 0$;

ii) Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}^1$. Alors par **homogénéité positive** de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ ,

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}^1} ;$$

iii) Soient f, g dans \mathcal{L}^1 . Alors $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc par **croissance** puis **additivité** de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ ,

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f+g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1} + \|g\|_{\mathcal{L}^1}.$$



Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$f \sim_{\mu} g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Pour passer d'une semie-norme à une norme, on identifie les vecteurs u et v dans F t.q.

$$N(u - v) = 0.$$

Rigoureusement, on définit **l'espace quotient** de F par la relation d'équivalence

$$u \sim v \iff N(u - v) = 0,$$

c-a-d l'ensemble constitué des classes d'équivalences de \sim :

► Montrons que \sim est une relation d'équivalence.

- (réflexivité). $N(u - u) = N(0_F) = 0 \Rightarrow u \sim u$;
- (symétrie). $N(u - v) = 0 = N(v - u)$ par absolue homogénéité de N ;
- (transitivité). $N(u - v) = N(v - w) = 0 \Rightarrow N(u - w) = N(u - v + v - w) \leq N(u - v) + N(v - w) = 0$ par l'inégalité triangulaire. ■

Notation. On note $[u] := \{v \in F \mid u \sim v\}$ la classe d'équivalence de $u \in F$ et on définit l'espace quotient de F par la relation d'équivalence \sim par :

$$F/\sim := \bigcup \{[u] \mid u \in F\}.$$

Exercice 4.3.1. Montrer $(u' \in [u] \text{ et } v' \in [v]) \Rightarrow \lambda u' + \mu v' \in [\lambda u + \mu v]$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On introduit pour toutes f, g dans \mathcal{L}^1 la relation d'équivalence notée \sim_μ définie par la semie-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$:

$$f \sim_\mu g \iff \|f - g\|_{\mathcal{L}^1} = 0 \iff |f - g| = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.} \iff f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Notation. On note pour $f \in \mathcal{L}^1$,

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^1 \mid g \sim_\mu f\} = \{g \in \mathcal{L}^1 \mid g = f \text{ } \mu\text{-p.p.}\}$$

sa classe d'équivalence par la relation \sim_μ .

Remarque fondamentale. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence ;

$$\lambda[f] + \mu[g] := [\lambda f + \mu g].$$

Ceci fait de l'espace quotient, un **espace vectoriel**.

Remarque 4.3.2. On fera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer fonctions et classes d'équivalences, c-a-d qu'on utilisera le même symbole f pour la classe et la fonction. Ceci n'est bien entendu pas dangereux.

Définition 4.3.3

On note $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^1 , l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de \mathcal{L}^1 par la relation d'équivalence $f \sim_\mu g \iff f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$, i.e. $L^1 := \mathcal{L}^1 / \sim_\mu$.

On définit la fonction $\|\cdot\|_{L^1}$ sur L^1 par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^1}: \quad L^1 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [f] &\longmapsto \|[f]\|_{L^1} := \|f\|_{\mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

où $f \in [f]$ est n'importe quel représentant de la classe d'équivalence, car si $f \sim_\mu g$ alors $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|g\|_{\mathcal{L}^1}$.

Remarque 4.3.3. Bien entendu, $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme sur L^1 .

Théorème 4.3.4

L'espace $(L^1(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 4.3.2. On note l^1 l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où $m := \text{card}$ est la mesure de comptage. Soit $u \in l^1$, alors

$$\|u\|_{l^1} = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter \mathcal{L}^1 car $\|u\|_{l^1} = 0$ implique $u = 0$.

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\int_E |f|^p d\mu$$

Pour simplifier on ne s'intéressera qu'à L^p en refaisant directement l'assimilation entre une fonction et sa classe d'équivalence (tous les raisonnements précédents faisant le lien entre \mathcal{L}^p et L^p étant similaires).

On étend la définition des espaces L^1 aux fonctions dont la puissance p est intégrable.

Définition 4.4.1

Soit un réel $0 < p < +\infty$.

On appelle $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^p l'ensemble des fonctions mesurables telles que

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty.$$

Exemple 4.4.1.

$$\forall p > 1, f(x) = \frac{1}{x^p} \in L^p([1, +\infty[, \mathcal{B}([1, +\infty[), \lambda)$$

Le cas $p = +\infty$:

Définition 4.4.2

L^∞ est l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées, i.e. telles que

$$\sup \text{ess } |f| < +\infty,$$

où la borne supérieure essentielle de f est définie par

$$\sup \text{ess } f := \inf \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(]a, \infty[)) = 0 \right\}.$$

Remarque 4.4.1. a est un majorant de f si $f^{-1}(]a, \infty[) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$ est vide. La borne supérieure classique est définie par : $\sup f := \inf \{a \in \mathbb{R} \mid f^{-1}(]a, \infty[) = \emptyset\}$. C'est le plus petit des majorants de f . La borne supérieure essentielle est donc un majorant de f mais seulement pour presque tout x .

Remarque 4.4.2. On a toujours $\inf f \leq \inf \text{ess } f \leq \sup \text{ess } f \leq \sup f$.

Exemple 4.4.2.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \arctan x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \in L^\infty$$

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\int_E |f|^p d\mu$$

Proposition 4.4.3

Soit un réel $0 < p \leq +\infty$. L'espace L^p est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

► La stabilité par la multiplication par un scalaire est claire. Pour l'addition on se donne f et g dans L^p . Alors $f + g$ est bien mesurable et on distingue 2 cas :

- $p = +\infty$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Par passage au sup, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- $0 < p < +\infty$

Notons $h = \max(|f|, |g|)$. On a

$$|f + g|^p \leq (2h)^p = 2^p h^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

(faire une disjonction des cas pour la dernière inégalité). D'où le résultat en intégrant. ■

Chapitre 4 : Les espaces \mathcal{L}^1 , L^1 et L^p

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1. Définitions

4.1.2. Linéarité

4.2. Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1. Définitions

4.2.2. Intégrale et fonctions égales presque partout

4.3. Introduction à l'espace L^1

4.3.1. L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

4.3.2. L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

4.4. Introduction aux espaces L^p

4.4.1. Définitions

4.4.2. L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

4.4.3. L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

$$\int_E |f|^p d\mu$$

On définit naturellement une application, qui sera une norme sur L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$:

Définition 4.4.4

Pour tout réel $0 < p < +\infty$ on pose pour f dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\|f\|_{L^p} \quad \text{ou} \quad \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on pose $\|f\|_{L^\infty}$ ou $\|f\|_\infty := \sup \operatorname{ess} |f|$.

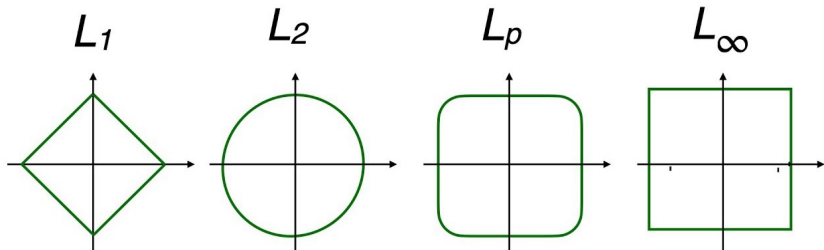
Remarque 4.4.3.

- En dimension finie on définit pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$. Tous les résultats de ce chapitre sont transposables en dimension finie.
- On peut montrer que $\forall f \in L^\infty$, $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ (et de même sur \mathbb{R}^n).

On va maintenant montrer que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $1 \leq p \leq +\infty$. On aura besoin de l'inégalité de Minkowski qui résulte de celle de Hölder.

Proposition 4.4.5

Soit un réel $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p .



L'inégalité suivante est fondamentale dans les espaces L^p .

Théorème 4.4.6 – Inégalité de Hölder

Soit (E, A, μ) un espace mesuré, $p, q > 0$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et f et g des fonctions de L^p et L^q respectivement. Alors $fg \in L^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Plus généralement si p et q sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $fg \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Pour le démontrer on utilise l'inégalité de Young :

Lemme 4.4.1. Soit $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ deux exposants conjugués. Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

► (Preuve du lemme). Le logarithme étant concave sur \mathbb{R}_+ , pour tout $a, b > 0$ on a $\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$ et on passe à l'exponentielle. ■

► (Preuve de l'inégalité de Hölder). Soit $p, q > 0$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

On la montre d'abord pour f et g telles que $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. Ceci résulte de l'inégalité de Young appliquée aux exposants $\tilde{p} = \frac{p}{r}$ et $\tilde{q} = \frac{q}{r}$. En effet on a bien $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$. D'où, $\forall x \in E$,

$$|f(x)|^r |g(x)|^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} |f(x)|^p + \frac{1}{\tilde{q}} |g(x)|^q$$

donc par intégration

$$\|fg\|_r^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} \|f\|_p^p + \frac{1}{\tilde{q}} \|g\|_q^q = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1.$$

Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ l'inégalité est vérifiée.

On passe maintenant au cas général en appliquant le cas particulier précédent aux fonctions $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$. ■

■ **Remarque 4.4.4.** Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

■ **Remarque 4.4.5.** L'inégalité reste vraie pour $(p, q) = (1, +\infty)$ avec $1/\infty = 0$.

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1 .

Exercice : faire l'exercice.

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1 .

► Par exemple $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur \mathbb{R}_+ . ■

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1 .

► Par exemple $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur \mathbb{R}_+ . ■

Exercice 4.4.4. Soit (E, A, μ) un espace mesuré tel que E soit de mesure finie, i.e. $\mu(E) = M < +\infty$. Soient $0 < p < q < +\infty$. Montrer que $L^\infty \subset L^q \subset L^p$.

Exercice : faire l'exercice.

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1 .

► Par exemple $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur \mathbb{R}_+ . ■

Exercice 4.4.4. Soit (E, A, μ) un espace mesuré tel que E soit de mesure finie, i.e. $\mu(E) = M < +\infty$. Soient $0 < p < q < +\infty$. Montrer que $L^\infty \subset L^q \subset L^p$.

► L'inégalité de Hölder donne en prenant $g = 1$ et en notant $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, c-a-d $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$:

$$\|fg\|_p = \|f\|_p \leq \|f\|_q \|1\|_r = M^{\frac{1}{r}} \|f\|_q.$$

Ce qui montre que si $f \in L^q$ alors $f \in L^p$. ■

On aurait aussi pu écrire :

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \left(\int_E |f|^q d\mu \right) \\ &= \left(\int_{\{|f| \leq 1\}} |f|^q d\mu \right) + \left(\int_{\{|f| > 1\}} |f|^q d\mu \right) \\ &\leq \mu(\{|f| \leq 1\}) + \left(\int_{\{|f| > 1\}} |f|^q d\mu \right) \\ &\leq \mu(E) + \left(\int_{\{|f| > 1\}} |f|^p d\mu \right) \\ &\leq \mu(E) + \left(\int_E |f|^p d\mu \right).\end{aligned}$$

Pour montrer $L^\infty \subset L^q$ on note que si $f \in L^\infty$ alors f est finie p.p. : $|f| \leq K < +\infty$. D'où en élevant à la puissance q et en intégrant

$$\|f\|_q^q \leq K^q \mu(E) < +\infty.$$

C'est l'inégalité triangulaire dans les espaces L^p pour $p \geq 1$.

Théorème 4.4.7 – Inégalité de Minkowski

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et f et g deux fonctions de L^p . On a alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

► Pour $p = 1$, resp. $p = +\infty$, c'est clair, cf. Section 2, resp. Proposition 4.4.3. Sinon, si $\|f+g\|_p = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, en appliquant successivement l'inégalité triangulaire dans \mathbb{R} et l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{p}{p-1}$, il vient

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p d\mu \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right) \left(\int |f+g|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})} d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$



De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour $(L^1, \|\cdot\|_1)$ que

Théorème 4.4.8

L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1, +\infty]$.

Remarque 4.4.6. L'inégalité est inversée pour $0 < p < 1$ (car $x \Rightarrow x^p$ n'est plus convexe mais concave sur \mathbb{R}_+). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ n'est donc pas un espace vectoriel normé pour $0 < p < 1$.

Exercice 4.4.5. Soit $0 < p < +\infty$ et $f_n \Rightarrow f$ simplement. On suppose : $\exists g \geq 0$ dans L^p telle que $\forall n, |f_n| \leq g$. Alors $f_n \Rightarrow f$ dans L^p (i.e. $\|f_n - f\|_p \Rightarrow 0$).

Exercice : faire l'exercice après avoir vu le chapitre 5.

De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour $(L^1, \|\cdot\|_1)$ que

Théorème 4.4.8

L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1, +\infty]$.

Remarque 4.4.6. L'inégalité est inversée pour $0 < p < 1$ (car $x \Rightarrow x^p$ n'est plus convexe mais concave sur \mathbb{R}_+). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ n'est donc pas un espace vectoriel normé pour $0 < p < 1$.

Exercice 4.4.5. Soit $0 < p < +\infty$ et $f_n \Rightarrow f$ simplement. On suppose : $\exists g \geq 0$ dans L^p telle que $\forall n, |f_n| \leq g$. Alors $f_n \Rightarrow f$ dans L^p (i.e. $\|f_n - f\|_p \Rightarrow 0$).

► Par passage à la limite dans $|f_n| \leq g$ on a $|f| \leq g$. Donc par inégalité triangulaire $|f_n - f| \leq 2g$, puis $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$, où g^p est une fonction intégrable indépendante de n . D'après le théorème de convergence dominée on peut donc passer à la limite dans

$$\int_E |f_n - f|^p d\mu$$

ce qui fournit $\|f_n - f\|_p \Rightarrow 0$. ■