

# Intégration

## Chapitre 8 : Liens entre dérivée et intégrale

Olivier COTS

3 janvier 2023

## Chapitre 8 : Liens entre dérivée et intégrale

### 8.1. Liens entre dérivée et intégrale

$$\int_E f \, d\mu$$

## Chapitre 8 : Liens entre dérivée et intégrale

### 8.1. Liens entre dérivée et intégrale

On s'intéresse dans cette partie au lien entre intégrale et dérivée, les fonctions seront ici définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On va considérer l'espace  $L^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$  où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue et où  $[a, b]$  est donc un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Dans ce cadre particulier, on note l'espace  $L^1$  de la manière suivante :

$$L^1([a, b], \mathbb{R})$$

où  $\mathbb{R}$  est ici l'espace d'arrivée.

On se pose les questions suivantes :

- Soit  $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ , on pose

$$F(x) = \int_{[a, x]} f \, d\lambda$$

et on se demande alors si  $F$  est dérivable en certains points et que vaut sa dérivée si elle existe. Cette première question reviendra à se demander si la dérivée de l'intégrale de  $f$  vaut  $f$  à quelque chose près.

- La seconde question revient à se demander pour quelles fonctions  $F$  on retombe sur nos pattes après dérivation puis intégration. C'est donc en quelque sorte, la question inverse à la première question.

Le théorème suivant répond à la première question.

### Théorème 8.1.1 – Fondamental de l'analyse I [1, Théorème 2.40.2]

Soit  $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ . Alors, la fonction

$$\begin{aligned} F: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) := \int_{[a, x]} f \, d\lambda \end{aligned}$$

est continue, dérivable presque partout et  $F' = f$  p.p..

**Remarque 8.1.1.** Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors  $F$  est une primitive de  $f$ , i.e.  $F$  est dérivable sur  $[a, b]$  et  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

Nous savons donc d'après ce théorème, que toute fonction  $f$  intégrable sur  $[a, b]$  est égale presque partout à la dérivée de son intégrale.

---

[1] C. Wagschal, *Dérivation, intégration*, Hermann, 1999.

D'après un résultat fondamental de l'analyse, nous savons que si  $F$  est une **primitive** (au sens donné ci-avant) d'une fonction  $f$  sur un intervalle compact, et si  $f$  est intégrable, alors  $F$  est égale à l'intégrale de sa dérivée  $f$ .

Par contre, une fonction  $F$  **continue et presque partout dérivable**, même si sa dérivée est intégrable, peut ne pas être égale à l'intégrale de sa dérivée. **L'escalier du diable**, ou escalier de Cantor, en est un exemple. Nous introduisons alors les fonctions **absolument continues** qui sont construites pour être égales à l'intégrale de leur dérivée.

### Définition 8.1.2 – Absolue continuité

On dit que la fonction  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **absolument continue** si, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour toute famille finie  $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$  d'intervalles ouverts contenus dans  $[a, b]$  et disjoints deux à deux, on ait

$$\sum_{i \in I} (b_i - a_i) \leq \delta \implies \sum_{i \in I} \|F(a_i) - F(b_i)\| \leq \varepsilon.$$

**Remarque 8.1.2.** On note  $AC([a, b], \mathbb{R}) \subset C^0([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Le théorème suivant répond à la seconde question.

### Théorème 8.1.3 – Fondamental de l'analyse II [1, Théorème 2.41.3]

$F \in AC([a, b], \mathbb{R})$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i)  $F$  est dérivable presque partout et il existe  $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$  t.q.  $F' = f$  p.p. ;
- ii) On a

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f \, d\lambda, \quad \forall x \in [a, b].$$

- Pour répondre à la seconde question, nous pouvons dire que les fonctions absolument continues sont égales à l'intégrale de leur dérivée, à une constante près.

**Remarque 8.1.3.** On peut définir la notion de fonction définie presque partout et dire directement dans le théorème que  $F' \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ . On écrit alors plus simplement

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F' \, d\lambda, \quad \forall x \in [a, b].$$

- En couplant les deux théorèmes fondamentaux on a le résultat suivant :

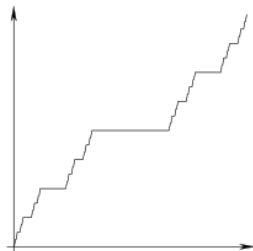
**Corollaire 8.1.4**

Soit  $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ . Soit  $F$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) := \int_{[a, x]} f \, d\lambda$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Alors,  $F \in AC([a, b], \mathbb{R})$  et  $F' = f$  presque partout sur  $[a, b]$ .



**Exemple 8.1.1.**

L'escalier de Cantor,<sup>1</sup> ou escalier du diable, est le graphe d'une fonction  $F$  continue croissante sur  $[0, 1]$ , telle que  $F(0) = 0$  et  $F(1) = 1$ , qui est dérivable presque partout, la dérivée étant presque partout nulle. Cette fonction ne peut donc pas être absolument continue. Cette fonction est construite de telle sorte que l'image de l'ensemble de Cantor,<sup>2</sup> qui est de mesure nulle, soit  $[0, 1]$  tout entier.



Escalier de Cantor.

1. Voir source [https://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier\\_de\\_Cantor](https://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor).

2. Voir source [https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble\\_de\\_Cantor](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor).

- Nous avons donc vu que l'ensemble  $L^1$  des fonctions intégrables au sens de Lebesgue contient l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable, noté  $R$ . Pour récapituler, nous avons les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_M^0([a, b], \mathbb{R}) \subset R([a, b], \mathbb{R}) \subset L^1([a, b], \mathbb{R}),$$

où on rappelle que  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , resp.  $\mathcal{C}_M^0([a, b], \mathbb{R})$ , est l'ensemble des fonctions continues, resp. continues par morceaux, sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- Nous venons de faire le lien entre intégrale et dérivée. Nous savons que l'intégration d'une fonction  $\mathcal{C}^0$  nous donne une fonction  $\mathcal{C}^1$  et la dérivation d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  nous donne une fonction  $\mathcal{C}^0$ . De même entre  $\mathcal{C}_M^0$  et  $\mathcal{C}_M^1$  et maintenant entre  $L^1$  et  $AC$ . On a alors les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_M^1([a, b], \mathbb{R}) \subset AC([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}).$$

**Remarque 8.1.4.** On peut donc voir les fonctions de  $L^1$  comme les dérivées des fonctions de  $AC$ , et les fonctions de  $AC$  comme les primitives des fonctions de  $L^1$ , en un sens généralisé. On parle parfois de dérivée faible.

**Exemple 8.1.2.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := 1. \end{aligned}$$

On pose pour  $x \in [0, 2]$  :

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x 1 \, dt = x.$$

Alors, on voit que  $F'(x) = 1 = f(x)$  pour tout  $x \in [0, 2]$ . Ici,  $f \in \mathcal{C}^0$  et  $F \in \mathcal{C}^1$ .

**Exemple 8.1.2.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := 1. \end{aligned}$$

On pose pour  $x \in [0, 2]$  :

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x 1 \, dt = x.$$

Alors, on voit que  $F'(x) = 1 = f(x)$  pour tout  $x \in [0, 2]$ . Ici,  $f \in \mathcal{C}^0$  et  $F \in \mathcal{C}^1$ .

**Exemple 8.1.3.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := \mathbb{1}_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

On pose pour  $x \in [0, 2]$  :

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \int_0^x f(t) \, dt = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$ , i.e. presque partout sur  $[0, 2]$ . Ici,  $F'$  n'est pas définie en 1. Ici,  $f \in \mathcal{C}_M^0$  et  $F \in \mathcal{C}_M^1$ .

**Exemple 8.1.4.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [1, 2] \text{ ou } x = 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On pose pour  $x \in [0, 2]$  :

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \int_0^x f(t) \, dt = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $F'(x) = f$  p.p. car  $F'(1/2) = 1 \neq f(1/2) = 0$  et  $F'$  n'est pas définie en 1.

**Exemple 8.1.4.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [1, 2] \text{ ou } x = 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On pose pour  $x \in [0, 2]$  :

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \int_0^x f(t) \, dt = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $F'(x) = f$  p.p. car  $F'(1/2) = 1 \neq f(1/2) = 0$  et  $F'$  n'est pas définie en 1.

**Exemple 8.1.5.** Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := \mathbb{1}_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]}(x). \end{aligned}$$

On pose pour  $x \in [0, 2]$  :

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $F'(x) = f$  p.p. car  $F' = f$  sauf sur  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Ici,  $f \in L^1$  et  $F \in AC$ .