



## TD 4 – Dualité et Algorithmie

▷ **Exercice 1.** On s'intéresse ici à un cas simple des "Support Vector Machines". On considère dans  $\mathbb{R}^n$  deux groupes de points  $\mathcal{X}^1 = \{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\}$  et  $\mathcal{X}^2 = \{x_1^2, \dots, x_{n_2}^2\}$  où  $x_i^k = (x_{i1}^k, \dots, x_{in}^k) \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que ces deux groupes de points sont séparables par un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^n$  (et non vides!). L'objectif est de trouver le "meilleur" hyperplan séparateur (cf. Figure 1). On désire donc trouver les hyperplans  $H_1$  d'équation  $\langle a, x \rangle = \alpha_1$  ( $a \neq 0$ ) et  $H_2$  d'équation  $\langle a, x \rangle = \alpha_2$  tels que :

- Pour tout  $x \in \mathcal{X}^1$ ,  $\langle a, x \rangle - \alpha_1 \geq 0$ ;
- Pour tout  $x \in \mathcal{X}^2$ ,  $\langle a, x \rangle - \alpha_2 \leq 0$ ;
- $d(H_1, H_2) = |\alpha_1 - \alpha_2| / \|a\|$  soit maximal.

On peut toujours en fait écrire les deux premières conditions de la façon suivante :

- $H_1$  d'équation  $\langle \omega, x \rangle + b - 1 = 0$  et pour tout  $x \in \mathcal{X}^1$ ,  $\langle \omega, x \rangle + b \geq 1$ ;
- $H_2$  d'équation  $\langle \omega, x \rangle + b + 1 = 0$  et pour tout  $x \in \mathcal{X}^2$ ,  $\langle \omega, x \rangle + b \leq -1$ .

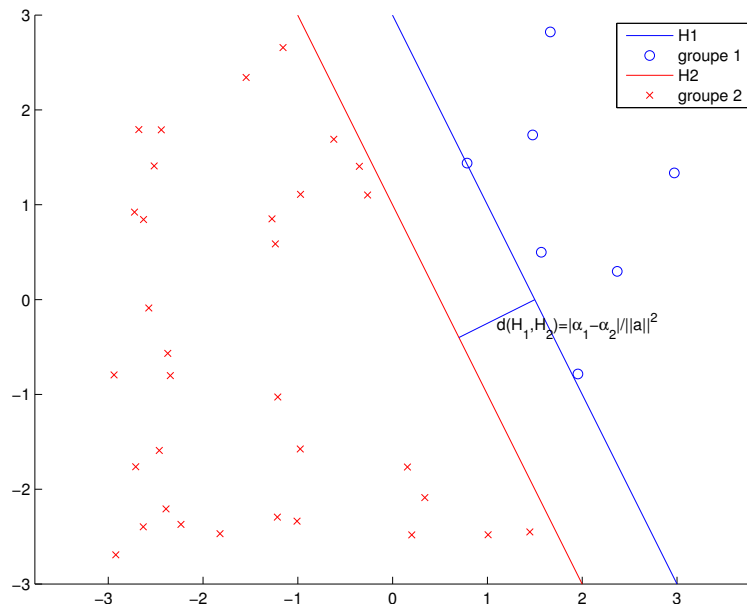


FIGURE 1 – SMV pour  $n = 2$ .

Le problème d'optimisation s'écrit alors

$$(P) \begin{cases} \text{Max}_{\|\omega\|} \frac{2}{\|\omega\|} \\ \langle \omega, x \rangle + b \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}^1 \\ \langle \omega, x \rangle + b \leq -1, \forall x \in \mathcal{X}^2 \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases} \iff (P') \begin{cases} \text{Min}_{\|\omega\|} \|\omega\|^2 \\ \langle \omega, x \rangle + b \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}^1 \\ \langle \omega, x \rangle + b \leq -1, \forall x \in \mathcal{X}^2 \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

**1.1.** Montrer l'existence de solution.

**1.2.** Écrire le Lagrangien associé à ce problème

**1.3.** Donnez les conditions de  $(KKT)$  associés à ce problème. Ces conditions sont-elles ici des conditions nécessaires et suffisantes ?

On pose maintenant

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & \dots & x_{1n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_1 1}^1 & \dots & x_{n_1 n}^1 \\ x_{11}^2 & \dots & x_{1n}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_2 1}^2 & \dots & x_{n_2 n}^2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$D$  est de dimension  $(n_1 + n_2, n_1 + n_2)$ . Le problème  $(P')$  s'écrit alors

$$(P'') \begin{cases} \text{Min} \|\omega\|^2 \\ DX\omega + bDe \leq -e \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

**1.4.** Écrire le Lagrangien associé au problème  $(P'')$ .

**1.5.** Écrire le problème dual du problème  $(P'')$

▷ **Exercice 2.** Résolution par pénalisation.

Soit  $f$  une fonction continûment différentiable de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(x) \geq \|x\|_2$ . On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} : \min_{\|x\|_2^2=1} f(x), \text{ et } \mathcal{P}_n : \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) + n (\|x\|_2^2 - 1)^2,$$

où  $n$  est un entier naturel.

**2.1.** Justifier que  $\mathcal{P}_n$  et  $\mathcal{P}$  admettent au moins une solution.

Dans toute la suite, nous supposons que ces deux problèmes admettent une solution unique et nous noterons  $x^*$  et  $x_n^*$  les solutions respectives de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_n$ .

**2.2.** On pose  $\Phi_n(x) = f(x) + n (\|x\|_2^2 - 1)^2$ .

1. Montrer que, si  $\|x\|_2 \geq 2$ ,  $\Phi_n(x) \geq 2 + 9n$ .
2. Montrer qu'il existe  $M \geq 0$  tel que, pour tout  $x$  tel que  $\|x\|_2 = 1$ , on a  $\Phi_n(x) \leq M$ .
3. En déduire que la suite  $(x_n^*)$  est bornée et que  $(x_n^*)$  admet une sous-suite convergente  $(y_n)$ , dont la limite sera notée  $y^*$  dans la suite.

On notera  $y_n = x_{\varphi(n)}^*$ , avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

**2.3.** Soit  $\gamma(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$ . Calculer  $\nabla\gamma(x)$  et montrer que  $\nabla f(y_n) + 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)y_n = 0$ . En déduire que  $y^*$  est tel que soit  $\|y^*\|_2 = 0$ , soit  $\|y^*\|_2 = 1$ .

**2.4.** Montrer que, si on suppose que  $\|y^*\|_2 = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{\varphi(n)}(y_n) = +\infty$ . Déduire des résultats de la question (2) que l'on aboutit à une contradiction et donc que  $\|y^*\|_2 = 1$ .

**2.5.** Déduire des questions précédentes que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)$  existe et qu'il existe  $\beta$  tel que  $\nabla f(y^*) + \beta y^* = 0$ .

**2.6.** Former le lagrangien associé au problème  $\mathcal{P}$ . Montrer alors que  $y^*$  vérifie la condition au premier ordre de Kuhn-Tucker-Lagrange et donner le multiplicateur de Lagrange associé.

**2.7.** Montrer que  $y^* = x^*$ . Expliquer pourquoi chercher à résoudre  $\mathcal{P}$  en considérant  $\mathcal{P}_n$  est appelé technique de pénalisation.