



## TD 1 – Optimisation, rappels et généralités

▷ **Exercice 1.** Étudier le problème d'optimisation :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

pour les application suivantes :

1.1.

$$\begin{aligned} f_1: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto 2(x_1 + x_2 + x_3 - 3)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

1.2.

$$\begin{aligned} f_2: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2. \end{aligned}$$

▷ **Exercice 2.** Soit  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et de la norme euclidienne associée. Soit  $a \in \mathbb{R}^n$ . On considère alors l'application

$$\begin{aligned} f_a: \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_a(x) = -\ln(1 - \|x\|^2) + \langle a, x \rangle. \end{aligned}$$

2.1. Montrer que  $f_a$  est deux fois dérivable sur  $\Omega$ .

2.2. Exprimer  $\nabla f_a(x)$  et  $\nabla^2 f_a(x)$  en tout point de  $\Omega$ .

2.3. Montrer que  $f_a$  est strictement convexe sur  $\Omega$ .

2.4. Discuter en fonction de  $a$  des solutions du problème d'optimisation :

$$(P) \begin{cases} \min f_a(x) \\ x \in \Omega. \end{cases}$$

2.5. Même question en imposant  $\|x\| < 1/2$ .

▷ **Exercice 3.** Démontrer le lemme

**Lemme 1.** Soit  $q$  la forme quadratique  $q(s) = g^\top s + \frac{1}{2}s^\top H s$ ,  $H$  symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :

1.  $q$  atteint un minimum si et seulement si  $H$  est semi-définie positive et  $g \in \text{Im } H$  et dans ce cas tout point solution de  $Hs = -g$  est un minimum global de  $q$ .
2.  $q$  a un unique minimum si et seulement si  $H$  est définie positive.