



TD 5 – Dualité et Algorithmie

▷ **Exercice 1.** On s'intéresse ici à un cas simple des "Support Vector Machines". On considère dans \mathbb{R}^n deux groupes de points $\mathcal{X}^1 = \{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\}$ et $\mathcal{X}^2 = \{x_1^2, \dots, x_{n_2}^2\}$ où $x_i^k = (x_{i1}^k, \dots, x_{in}^k) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que ces deux groupes de points sont séparables par un hyperplan affine de \mathbb{R}^n (et non vides!). L'objectif est de trouver le "meilleur" hyperplan séparateur (cf. Figure 1). On désire donc trouver les hyperplans H_1 d'équation $\langle a, x \rangle = \alpha_1$ ($a \neq 0$) et H_2 d'équation $\langle a, x \rangle = \alpha_2$ tels que :

- Pour tout $x \in \mathcal{X}^1$, $\langle a, x \rangle - \alpha_1 \geq 0$;
- Pour tout $x \in \mathcal{X}^2$, $\langle a, x \rangle - \alpha_2 \leq 0$;
- $d(H_1, H_2) = |\alpha_1 - \alpha_2| / \|a\|$ soit maximal.

On peut toujours en fait écrire les deux premières conditions de la façon suivante :

- H_1 d'équation $\langle \omega, x \rangle + b - 1 = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{X}^1$, $\langle \omega, x \rangle + b \geq 1$;
- H_2 d'équation $\langle \omega, x \rangle + b + 1 = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{X}^2$, $\langle \omega, x \rangle + b \leq -1$.

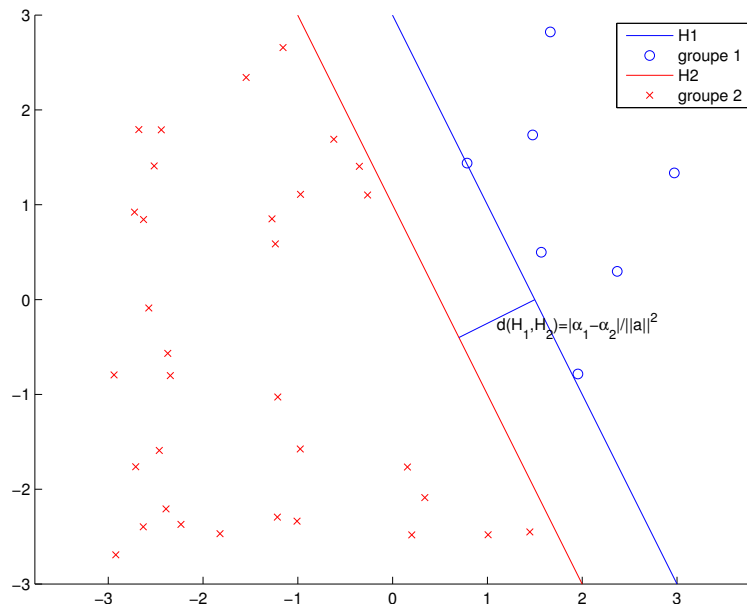


FIGURE 1 – SMV pour $n = 2$.

Le problème d'optimisation s'écrit alors

$$(P) \begin{cases} \text{Max}_{\|\omega\|} \frac{2}{\|\omega\|} \\ \langle \omega, x \rangle + b \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}^1 \\ \langle \omega, x \rangle + b \leq -1, \forall x \in \mathcal{X}^2 \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases} \iff (P') \begin{cases} \text{Min}_{\|\omega\|} \|\omega\|^2 \\ \langle \omega, x \rangle + b \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}^1 \\ \langle \omega, x \rangle + b \leq -1, \forall x \in \mathcal{X}^2 \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

1.1. Montrer l'existence de solution.

1.2. Écrire le Lagrangien associé à ce problème

1.3. Donnez les conditions de (KKT) associés à ce problème. Ces conditions sont-elles ici des conditions nécessaires et suffisantes ?

On pose maintenant

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & \dots & x_{1n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_1 1}^1 & \dots & x_{n_1 n}^1 \\ x_{11}^2 & \dots & x_{1n}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_2 1}^2 & \dots & x_{n_2 n}^2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

D est de dimension $(n_1 + n_2, n_1 + n_2)$. Le problème (P') s'écrit alors

$$(P'') \begin{cases} \text{Min} \|\omega\|^2 \\ DX\omega + bDe \leq -e \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.4. Écrire le Lagrangien associé au problème (P'') .

1.5. Écrire le problème dual du problème (P'')

▷ **Exercice 2.** Résolution par pénalisation.

Soit f une fonction continûment différentiable de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} vérifiant $f(x) \geq \|x\|_2$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} : \min_{\|x\|_2^2=1} f(x), \text{ et } \mathcal{P}_n : \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) + n (\|x\|_2^2 - 1)^2,$$

où n est un entier naturel.

2.1. Justifier que \mathcal{P}_n et \mathcal{P} admettent au moins une solution.

Dans toute la suite, nous supposons que ces deux problèmes admettent une solution unique et nous noterons x^* et x_n^* les solutions respectives de \mathcal{P} et \mathcal{P}_n .

2.2. On pose $\Phi_n(x) = f(x) + n (\|x\|_2^2 - 1)^2$.

1. Montrer que, si $\|x\|_2 \geq 2$, $\Phi_n(x) \geq 2 + 9n$.
2. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$, on a $\Phi_n(x) \leq M$.
3. En déduire que la suite (x_n^*) est bornée et que (x_n^*) admet une sous-suite convergente (y_n) , dont la limite sera notée y^* dans la suite.

On notera $y_n = x_{\varphi(n)}^*$, avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

2.3. Soit $\gamma(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$. Calculer $\nabla\gamma(x)$ et montrer que $\nabla f(y_n) + 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)y_n = 0$. En déduire que y^* est tel que soit $\|y^*\|_2 = 0$, soit $\|y^*\|_2 = 1$.

2.4. Montrer que, si on suppose que $\|y^*\|_2 = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{\varphi(n)}(y_n) = +\infty$. Déduire des résultats de la question (2) que l'on aboutit à une contradiction et donc que $\|y^*\|_2 = 1$.

2.5. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)$ existe et qu'il existe β tel que $\nabla f(y^*) + \beta y^* = 0$.

2.6. Former le lagrangien associé au problème \mathcal{P} . Montrer alors que y^* vérifie la condition au premier ordre de Kuhn-Tucker-Lagrange et donner le multiplicateur de Lagrange associé.

2.7. Montrer que $y^* = x^*$. Expliquer pourquoi chercher à résoudre \mathcal{P} en considérant \mathcal{P}_n est appelé technique de pénalisation.