



TD 5 — Algorithmie

▷ **Exercice 1.** Résolution par pénalisation.

Soit f une fonction continûment différentiable de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} vérifiant $f(x) \geq \|x\|_2$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} : \min_{\|x\|_2=1} f(x), \text{ et } \mathcal{P}_n : \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) + n(\|x\|_2^2 - 1)^2,$$

où n est un entier naturel.

1.1. Justifier que \mathcal{P}_n et \mathcal{P} admettent au moins une solution.

Dans toute la suite, nous supposons que ces deux problèmes admettent une solution unique et nous noterons x^* et x_n^* les solutions respectives de \mathcal{P} et \mathcal{P}_n .

1.2. On pose $\Phi_n(x) = f(x) + n(\|x\|_2^2 - 1)^2$.

1. Montrer que, si $\|x\|_2 \geq 2$, $\Phi_n(x) \geq 2 + 9n$.
2. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$, on a $\Phi_n(x) \leq M$.
3. En déduire que la suite (x_n^*) est bornée et que (x_n^*) admet une sous-suite convergente (y_n) , dont la limite sera notée y^* dans la suite.

On notera $y_n = x_{\varphi(n)}^*$, avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

1.3. Soit $\gamma(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$. Calculer $\nabla \gamma(x)$ et montrer que $\nabla f(y_n) + 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)y_n = 0$. En déduire que y^* est tel que soit $\|y^*\|_2 = 0$, soit $\|y^*\|_2 = 1$.

1.4. Montrer que, si on suppose que $\|y^*\|_2 = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{\varphi(n)}(y_n) = +\infty$. Déduire des résultats de la question (2) que l'on aboutit à une contradiction et donc que $\|y^*\|_2 = 1$.

1.5. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)$ existe et qu'il existe β tel que $\nabla f(y^*) + \beta y^* = 0$.

1.6. Former le lagrangien associé au problème \mathcal{P} . Montrer alors que y^* vérifie la condition au premier ordre de Kuhn-Tucker-Lagrange et donner le multiplicateur de Lagrange associé.

1.7. Montrer que $y^* = x^*$. Expliquer pourquoi chercher à résoudre \mathcal{P} en considérant \mathcal{P}_n est appelé technique de pénalisation.