



## TD 4 — Sous-problèmes de régions de confiance

▷ **Exercice 1.** Soient  $g$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$  et  $c$  et  $\delta$  deux constantes strictement positives. On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(s) = g^\top s + c \\ \|s\|^2 \leq \delta. \end{cases}$$

**1.1.** Représenter l'ensemble des contraintes et donner graphiquement la solution.

**1.2.** Résoudre le problème  $(P)$ .

▷ **Exercice 2.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème

**Théorème 1.** On suppose que la matrice  $H$  est symétrique.  $s^*$  est solution du problème

$$(P^{rc}) \begin{cases} \min q(s) = f + g^\top s + \frac{1}{2} s^\top H s \\ \|s\|^2 \leq \delta, \end{cases}$$

si et seulement si  $\|s^*\|^2 \leq \delta$  et il existe  $\mu^* \geq 0$  tel que

1.  $(H + 2\mu^* I)s^* = -g$  ;
2.  $\mu^*(\|s^*\|^2 - \delta) = 0$  ;
3.  $H + 2\mu^* I$  est semi-définie positive.

**2.1.** Démontrer le lemme

**Lemme 1.** Soit  $q$  la forme quadratique  $q(s) = g^\top s + \frac{1}{2} s^\top H s$ ,  $H$  symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :

1.  $q$  atteint un minimum si et seulement si  $H$  est semi-définie positive et  $g \in \text{Im } H$  et dans ce cas tout point solution de  $Hs = -g$  est un minimum global de  $q$ .
2.  $q$  a un unique minimum si et seulement si  $H$  est définie positive.

**2.2.** Démontrer le théorème.

▷ **Exercice 3.** On considère le problème d'optimisation

$$(P^{(k)}) \begin{cases} \min f(s) = \frac{1}{2} \|r(\beta^{(k)}) + J(\beta^{(k)})s\|^2 \\ \|s\|^2 \leq \delta^{(k)} \\ s \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

où  $J(\beta^{(k)})$  est une matrice  $(n, p)$  de rang  $p$ .

Démontrez que la solution de  $(P^{(k)})$  s'écrit

$$s^{(k+1)} = -(J(\beta^{(k)})^\top J(\beta^{(k)}) + \mu^{(k+1)} I)^{-1} J(\beta^{(k)})^\top r(\beta^{(k)})$$

avec

$$\mu^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \|s^{GN}\|^2 = \|(J(\beta^{(k)})^\top J(\beta^{(k)}))^{-1} J(\beta^{(k)})^\top r(\beta^{(k)})\|^2 \leq \delta^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} > 0 & \text{unique tel que } \|s(\mu^{(k+1)})\|^2 = \delta^{(k)}. \end{cases}$$