



TD 1 – Optimisation

Formulation mathématique

▷ **Exercice 1.** On donne ci-dessous la population des États Unis pour les années 1900 à 2000¹.

| | | | | | | | |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| années | 1900 | 1910 | 1920 | 1930 | 1940 | 1950 | 1960 |
| pop. | 75.995 | 91.972 | 105.711 | 123.203 | 131.669 | 150.697 | 179.323 |
| années | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | | | |
| pop. | 203.212 | 226.505 | 249.633 | 281.422 | | | |

TABLE 1 – Données provenant de "U.S. Census"

On désire ajuster ces données sur le modèle

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

On utilise la méthode des moindres carrés.

1.1. Donner la formulation mathématique de ce problème et visualiser la fonction à minimiser.

1.2. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\beta) = \frac{1}{2} \|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2} \|y - X\beta\|^2 \\ \beta & \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

On donnera les valeurs de X et de y et à quoi correspond β .

▷ **Exercice 2. Maintenance d'un réseau de distribution**²

Un ingénieur responsable de la maintenance d'un réseau de distributeurs de boissons aimerait prédire le temps nécessaire pour l'approvisionnement. Le service d'approvisionnement comprend le remplissage des machines et leurs réglages éventuels. Deux variables influencent ce temps : le nombre de caisses à charger et la distance parcourue par l'employé pour approvisionner l'ensemble des machines. Le responsable dispose de 25 observations, qui sont résumées dans le tableau suivant :

1. Exemple provenant du cours de Cleve Moler page 4 chap. 5 "Numerical computing with Matlab"
2. Exemple provenant du livre d'A. Antoniadis, J. Berruyer et R. Carmona, régression non linéaire et applications", éditions Economica, p. 45

| Obs. | Temps | Nb caisses | Dist. | Obs. | Temps | Nb. caisses | Dist. |
|------|-------|------------|-------|------|-------|-------------|-------|
| 1 | 16.68 | 7 | 560 | 13 | 13.50 | 4 | 255 |
| 2 | 11.50 | 3 | 220 | 14 | 19.75 | 6 | 462 |
| 3 | 12.03 | 3 | 340 | 15 | 24.00 | 9 | 448 |
| 4 | 14.88 | 4 | 80 | 16 | 29.00 | 10 | 776 |
| 5 | 13.75 | 6 | 150 | 17 | 13.35 | 6 | 200 |
| 6 | 18.11 | 7 | 330 | 18 | 19.00 | 7 | 132 |
| 7 | 8.00 | 2 | 110 | 19 | 9.50 | 3 | 36 |
| 8 | 17.83 | 7 | 210 | 20 | 35.10 | 17 | 770 |
| 9 | 79.24 | 30 | 1460 | 21 | 17.90 | 10 | 140 |
| 10 | 21.50 | 5 | 605 | 22 | 52.32 | 26 | 810 |
| 11 | 40.33 | 16 | 688 | 23 | 18.75 | 9 | 450 |
| 12 | 21.00 | 10 | 215 | 24 | 19.83 | 8 | 685 |
| | | | | 25 | 10.75 | 4 | 150 |

On désire ajuster à cet ensemble de données un modèle de régression multiple

$$y(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

où y est le temps requis, x_1 est le nombre de caisses utilisées et x_2 est la distance parcourue.

2.1. Donner la formulation mathématique de ce problème.

2.2. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\beta) = \frac{1}{2} \|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2} \|y - X\beta\|^2 \\ \beta & \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

On donnera les valeurs de X et de y et à quoi correspond β .

▷ **Exercice 3.** La maquette d'un nouveau type d'éolienne est testé en soufflerie. 20 mesures sont réalisées entre 1 et 20 m/s . L'allure de la réponse suggère un modèle à rupture (cf. la figure 1)

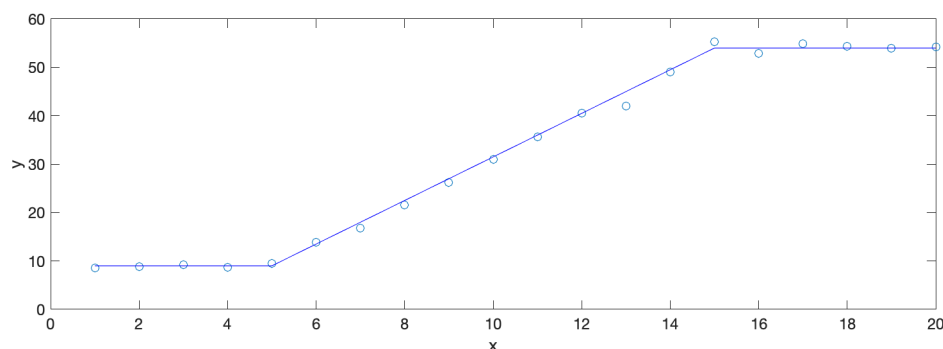


FIGURE 1 – Données et modèle pour une éolienne.

La production y est modélisée en fonction du vent généré dans la soufflerie x de la façon suivante : entre 1 et 5 m/s , la réponse est supposée constante, elle augmente linéairement entre 5 et 15 m/s , avant de saturer (redevenir constante) au delà de 15 m/s . Il y a bien sur continuité de la réponse aux points 5 et 15 m/s

3.1. Écrire le modèle $y(x, \beta)$ en fonction des plages des valeurs de x . Quelle est la dimension de β .

3.2. Écrire le problème aux moindres carrés d'estimation des paramètres β . Ce problème est-il linéaire? Si oui on donnera le vecteur \mathbf{y} et la matrice \mathbf{X} permettant d'écrire le problème sous la forme

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

▷ **Exercice 4. Géoréférence d'une image satellite**³

On dispose d'une image satellite que l'on désire recaler par rapport à une carte géographique que l'on a à notre disposition. Pour cela on définit n points, appelés points d'amer, que l'on peut parfaitement faire correspondre sur la carte et sur l'image satellite. On prend par exemple un croisement de route, un point particulier sur une rivière... Concrètement on a donc à notre disposition n coordonnées (x_i, y_i) des n points d'amer sur la carte et n coordonnées (x'_i, y'_i) de ces mêmes points sur l'image satellite. On choisit d'exprimer ces coordonnées :

- en pixels pour les (x'_i, y'_i) (coordonnées $(0, 0)$ pour le coin inférieur gauche) ;
- en mètres relativement à un référentiel géodésique particulier pour les (x_i, y_i) , via une carte IGN par exemple.

On a par exemple les données suivantes :

| Numéros | x_i | y_i | x'_i | y'_i |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 252 | 2661 | 458805 | 1831634 |
| 2 | 235 | 2603 | 458157 | 1830577 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| 23 | 1021 | 2254 | 471301 | 1819574 |

En pratique l'image satellite est déformée par rapport à la réalité. Cette déformation a plusieurs origines : satellite non vertical par rapport à la prise de vue, présence de nuages dans l'atmosphère... En conséquence on suppose que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} x = \gamma_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 x'^2 + \gamma_4 x' y' + \gamma_5 y'^2 \\ y = \delta_0 + \delta_1 x' + \delta_2 y' + \delta_3 x'^2 + \delta_4 x' y' + \delta_5 y'^2 \end{cases}$$

On désire estimer les paramètres par les moindres carrés.

4.1. Pour l'estimation des paramètres $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_5)$ quelles sont les données?

4.2. Écrire le problème d'estimation par les moindres carrés linéaires de γ .

4.3. Mêmes questions pour δ .

▷ **Exercice 5.** On désire construire un réservoir de forme cylindrique de volume maximum dont la surface latérale est inférieure à S_{lat} et la surface totale est inférieure à S_{tot} .

5.1. Formaliser le problème.

3. Voir cours de C. Monteil

- ▷ **Exercice 6.** Soit $B(a, \delta)$ la boule de centre a et de rayon $\delta > 0$ fixée. Soient p frères ennemis. On désire enfermer ces frères ennemis dans $B(a, \delta)$ en maximisant la distance minimale ξ qui les sépare deux à deux.

6.1. Formaliser le problème.

- ▷ **Exercice 7.** On s'intéresse ici à la modélisation via un neurone formel.

Définition 1. Un neurone formel est une fonction paramétrée par $n+1$ paramètres w_1, \dots, w_n, b :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, w, b) &\longmapsto g(x, w, b) := \sigma(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b) \end{aligned}$$

où σ est une fonction donnée qui s'appelle une fonction d'activation. Chaque paramètre w_i s'appelle le poids synaptique associé au signal d'entrée x_i .

On prendra dans la suite, sauf mention contraire, comme fonction σ la fonction tangente hyperbolique :

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sigma(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

La figure 2 schématise un neurone formel.

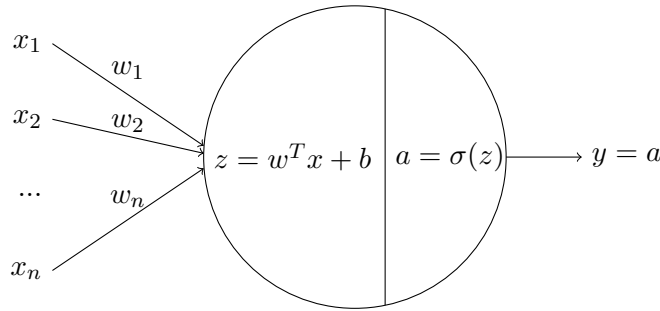


FIGURE 2 – Représentation schématique d'un neurone.

1. produit scalaire entre les entrées x et les poids synaptiques w : $w^T x$;
2. ajout d'une valeur de référence (biais b) : $z = w^T x + b$
3. application de la fonction d'activation à la valeur obtenue z : $a = \sigma(z)$

Définition 2. On a à notre disposition K points $x^k \in \mathbb{R}^n$ et $y^k \in \mathbb{R}$, on appelle apprentissage du neurone l'estimation par les moindres carrés des paramètres du neurone.

7.1. Écrire le problème aux moindres carrés qui définit l'apprentissage. On donnera en particulier la fonction résidu r en précisant clairement l'espace de départ et l'espace d'arrivée.

7.2. Ce problème est-il un problème aux moindres carrés linéaires ? Si oui, on donnera la matrice X .

7.3. Si on prend comme fonction d'activation σ l'identité, le problème aux moindres carrés devient-il linéaire ? Si oui, on donnera la matrice X .